Revista Científica de la Facultad de Filosofía – UNA (ISSN: 2414-8717)
Vol. 11, agosto-diciembre 2020 (2), pp. 8-33.

ARTÍCULO ORIGINAL
Recibido: 23/11/2020 – Aceptado: 30/11/2020

LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Manuel Barrantes López[1] - María Consuelo Barrantes Masot[2] - Víctor Zamora Rodríguez[3]

Resumen

El objetivo principal de este artículo es presentar una serie de actividades que ayuden a los profesores a enseñar el Teorema de Pitágoras de una forma activa mediante la metodología de resolución de problemas.

Se hace una aproximación al Teorema de Pitágoras a través de actividades en el laboratorio donde las construcciones, diseños y reflexiones ponen el acento en la comprensión del teorema mediante la manipulación de ejemplos que el alumno va trabajando y que le llevan a la generalización. A la vez, estas actividades se acompañan conotras de refuerzo mediante GeoGebra, un software de geometría dinámica, que afianzan aún más el conocimiento del teorema y sus posibles ampliaciones y utilidades.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras - resolución de problemas -software de geometría dinámica -enseñanza de la geometría - demostraciones del Teorema de Pitágoras.

TEACHING THE PYTHAGOREAN THEOREM

Abstract

The main objective of this article is to present a series of activities that help teachers to teach the Pythagorean Theorem in an active way through problem solving methodology.

An approach to the Pythagorean Theorem is made through activities in the laboratory where constructions, designs and reflections emphasize the understanding of the theorem through the manipulation of examples that the student is working on and that lead to generalization. At the same time, these activities are accompanied by other reinforcement activities using

1 Facultad de Educación - Universidad de Extremadura - España. Correo electrónico: barrante@unex.es
2 Universidad de Valencia - España. Correo electrónico: conbarmas@gmail.com
3 Escuela de Ingenierías Industriales - Universidad de Extremadura - España. Correo electrónico: victor@unex.es

GeoGebra, a dynamic geometry software, which further strengthen the knowledge of the theorem and its possible extensions and utilities.
Keywords: Pythagorean Theorem -problem solving - dynamic geometry software - geometry teaching - Pythagorean theorem proofs.

Introducción

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa (fig. 1).

Esta celebre proposición, conocida como el Teorema de Pitágoras, la proposición pitagórica o la proposición 47 del primer libro de los Elementos de Euclides ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. La relación pitagórica es la ecuación de la circunferencia, aparece constantemente en el estudio de la Geometría Analítica y de la Trigonometría, y el teorema del coseno es un caso particular de dicho teorema. También es la raíz histórica del análisis indeterminado de Diofanto y Fermat, y la fuente de casi todas las relaciones métricas en Geometría.

Es importante hacer resaltar a los alumnos el valor práctico del Teorema en todas las Ciencias, concretamente en el campo de la Física nos lo podemos encontrar en la rama de Mecánica Clásica, Astrofísica, Física del estado Sólido y en Electromagnetismo, entre otros. Por ejemplo, una aplicación alternativa del teorema, en distancias, sería para hallar la separación desde una distribución de cargas al punto donde se va a calcular el campo eléctrico, ya que esta distancia se encuentra en la expresión del cálculo del mismo. (Figura 1). Por tanto, podemos afirmar que el Teorema de Pitágoras tiene un gran valor práctico, teórico y didáctico reconocido en toda la sociedad científica actual.

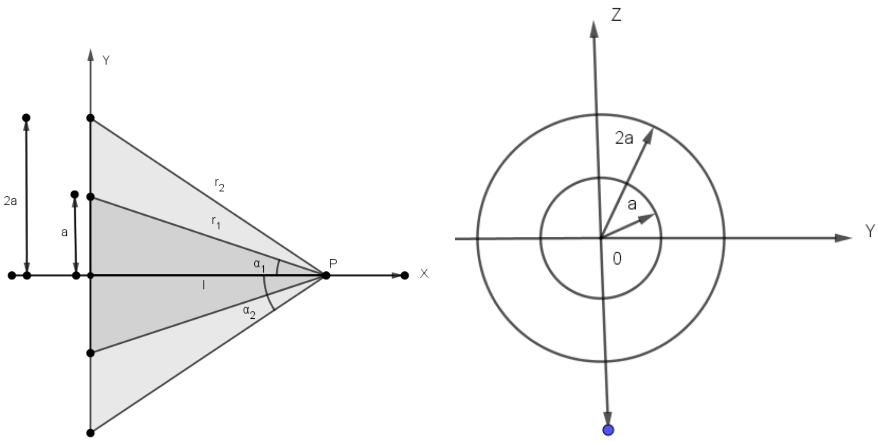


Figura: 1. Vistas de los anillos en distintos planos.

Desde un punto de vista didáctico, su estudio puede ser abordado desde una perspectiva histórica: tratando de estudiar o conocer la vida de Pitágoras y los pitagóricos; diferentes problemas o demostraciones de la proposición a lo largo de la historia, que son curiosas o pertenecen a algún matemático conocido; así como las repercusiones y aplicaciones de dicha proposición para el avance de las Matemáticas.

También puede ser tratado como un problema abierto, accesible a los alumnos y a la vez motivante, mediante la utilización de recursos y materiales apropiados como son los puzles pitagóricos con los que se pueden realizar diferentes demostraciones del teorema, e incluso el alumno puede realizar su propia demostración (Barrantes, 1990). En este apartado, estudiaremos, también, cómo ampliar la proposición a los casos en los que los lados del triángulo no son lados de cuadrados sino lados de otras figuras geométricas.

Por último, todas estas actividades se acompañan con otras construcciones dinámicas que contribuyen a la enseñanza del Teorema de Pitágoras haciendo uso de software de geometría dinámica GeoGebra, que afianzan aún más el conocimiento del teorema y sus posibles ampliaciones y utilidades.

Así pues, las distintas sugerencias van dirigidas a profesores de Educación Primaria (6-12 años) y Secundaria (12-16 años). Encontraremos actividades adecuadas para alumnos de uno u otro nivel, en las que se puede tener un contacto con la proposición de manera empírica o informal; sugerimos demostraciones formales y resultados al alcance de alumnos de Secundaria y otras actividades dirigidas a estudiantes para profesores y enseñantes en general, orientadas a reconocer la importancia que tiene dicha proposición no sólo en la Didáctica de la Geometría, sino en relación con otras áreas de las Matemáticas. Cada uno, como profesional de la enseñanza, deberá escoger lo más adecuado al nivel de su interés.

El objetivo principal de nuestro trabajo es *presentar una serie de actividades que ayuden a los estudiantes para profesores y a los profesores a presentar el teorema de Pitágoras de una forma activa basada en la resolución de problemas mediante una fase de experimentación,* en la que se realicen diferentes pruebas o ensayos relacionados con el entorno real, seguido de una fase de comprensión y por último una fase de aplicación para profundizar y comprobar los conocimientos aprendidos, en la que se realicen otros ejercicios y problemas del entorno real en los que también puedan surgir nuevos conceptos (Barrantes y Barrantes, 2017).En estas fases deben tenerse en cuenta las estrategias, el lenguaje y los algoritmos y destrezas del alumnado.

Es decir, pretendemos realizar una aproximación sobre la enseñanza del Teorema de Pitágoras en la ESO (Enseñanza Secundaria Obligatoria), y sobre la enseñanza del mismo a través de actividades en el laboratorio donde las actividades manuales mediante la metodología de laboratorio pone el acento en la formación de los conceptos, es decir, la experimentación y los sucesivos ejemplos que el alumno va observandoy le llevan a una generalización. A la vez estas actividades se acompañan con actividades de refuerzo mediante un software de geometría dinámica, concretamente GeoGebra que afianzan aún más el conocimiento del teorema y sus posibles ampliaciones y utilidades.

Revisión y estudio de textos relacionados con el Teorema de Pitágoras.

Por muchos años se le ha atribuido a Pitágoras (585-500 a. C), filósofo y matemático griego, el enunciado y demostración del teorema geométrico que lleva su nombre, el cual expresa la relación entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

El enunciado que dieron los griegos al Teorema de Pitágoras es el siguiente: *el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos*. El enunciado moderno usa términos algebraicos: *en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos*. Euclides, según su interpretación al teorema, dice que *el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos*.

Son varias las fuentes bibliográficas en las que podemos encontrar información acerca de las distintas demostraciones o pruebas del Teorema de Pitágoras.

Diferentes autores como Bergua, 1958; Schuré, 1995; Caniff, 1997 y Strathern,1999 nos dan información sobre la vida de Pitágoras. Existen evidencias de que en otras culturas también se conocía el teorema aunque no se conoce la existencia de su demostración. Bergua(1958) nos dice que durante sus viajes a Egipto y al oriente antiguo, el sabio griego conoció el enunciado de la regla y se dedicó a demostrarla. En González (2001; 2008) se presenta los antecedentes del teorema de Pitágoras en civilizaciones como la Prehelénica, la Babilónica, en la India y Egipto y en China así como las implicaciones y desarrollo de su pensamiento, no sólo en la Historia de las Matemáticas, sino también en la Historia general. En este último sentido, el plural recorrido de las enseñanzas pitagóricas a través del tiempo resulta uno de los aspectos más interesantes de estos trabajos.

También, Barrantes (1998) realiza: el estudio de dicho teorema desde el punto de vista histórico, tratando de estudiar o conocer la vida de Pitágoras y los pitagóricos; diferentes demostraciones de la proposición a lo largo de la historia que son curiosas o pertenecen a algún matemático conocido; así como las repercusiones y aplicaciones de dicha proposición para el avance de las Matemáticas.

Muchas otras demostraciones y pruebas pueden encontrarse en la extensa bibliografía que existe sobre este tema, de la que podríamos resaltar los artículos de Yanney y Calderhead (1896, 1897, 1898, 1899) en la revista American Mathematical Monthly y también, un gran número de páginas web como las de Alexander

Bogomolny, Francisco Javier García Capitán o Eric Weisstein, en la que además podemos encontrar una extensa bibliografía. Estas páginas y otras se indican en la webgrafía final.

De igual forma, Nelsen (1993), con el objetivo principal de proporcionar pistas en cada demostración para estimular el pensamiento matemático, presenta una recopilación de demostraciones matemáticas a través de imágenes o diagramas.

Sin embargo, la recopilación más extensa es de Loomis (1968, reedición mismo texto 1940). Encontramos 370 demostraciones con sus correspondientesfiguras. Éstas demostraciones son algebraicas (109), geométricas (255), dinámicas (4) (basadas en los conceptos de masa, velocidad, fuerza, y otros conceptos físicos) y cuaterniónicas (2) (basadas en operaciones vectoriales).

Una vez comentada la bibliografía, entramos de lleno en presentar las actividades que consideramos apropiadas para una enseñanza eficaz de esta famosa proposición. Dichas actividades han sido divididas en tres apartados: A partir de la historia, actividades de puzles en el laboratorio de matemáticas y Actividades dinámicas con GeoGebra.

Actividades a partir de la historia

No es nada nuevo afirmar que la introducción de la historia de las matemáticas en las actividades del aula enriquece bastante la enseñanza de esta materia. Por ello, sería conveniente que el alumno realizara actividades relacionadas con la vida de Pitágoras y los pitagóricos con la ayuda de internet o fichas proporcionadas por el profesor. La realización de un comic como el de la figura 2 sería también una actividad motivante y divertida para los alumnos.

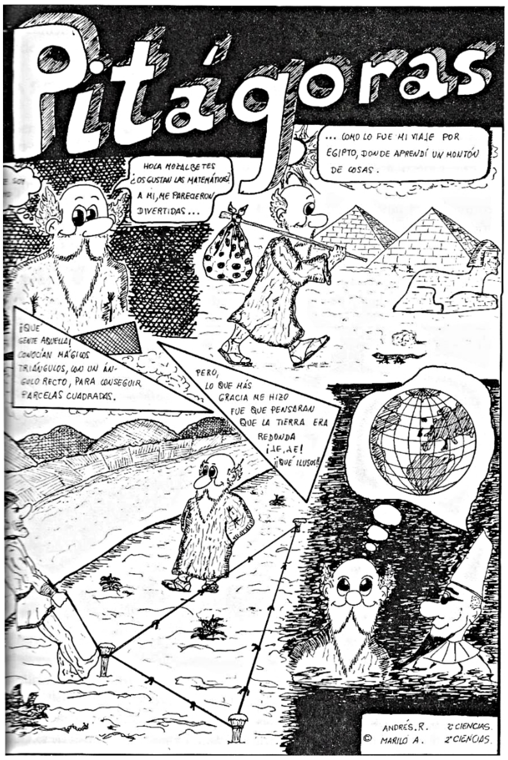


Figura 2. Comic de Pitágoras (Barrantes, 1988).

También, una más directa aproximación al aprovechamiento matemático de este recurso en la enseñanza se puede conseguir proponiendo al alumnado, diferentes demostraciones clásicas de la proposición o problemas relacionados con ella, transportando a éstos a la época en las que fueron realizadas. Es decir, además de trabajar la biografía de Pitágoras (Bergua,1958; Schuré,1995; Caniff,1997; Strathern,1999) podemos examinar qué conocimientos poseían los autores para realizar esa demostración concreta y qué métodos utilizaban para ejecutarla.

Una demostración, sobre la que varios autores mantienen la polémica de si es o no la demostración original de los pitagóricos, es la n° 91 en Loomis (1968) que se desarrolla sobre dos cuadrados (fig.3); esta demostración, recomendada para alumnos de Educación Primaria (6-12 años), es muy fácil de realizar recortando y colocando las figuras de los dos cuadrados adecuadamente para que los alumnos observen que se cumple la proposición pitagórica. Flores (1992) realiza esta demostración, de una manera más formal, mediante el cálculo de las áreas de las figuras correspondientes de los dos cuadrados e igualación de las áreas totales (fig. 3).

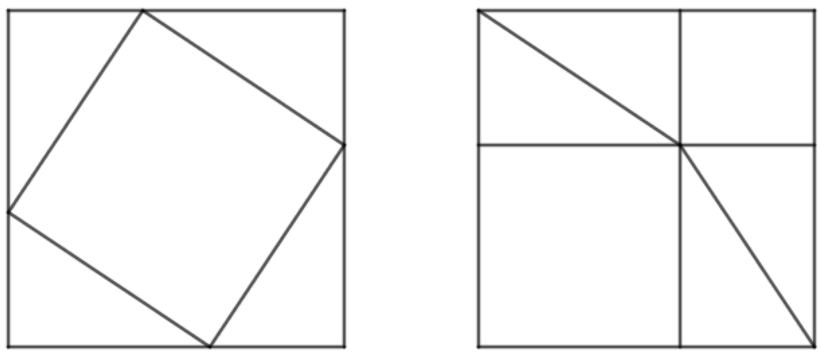


Figura 3. ¿Demostración original de los pitagóricos?

Para ilustrar que el teorema era conocido por geómetras anteriores a los pitagóricos, sería estimulante considerar dos demostraciones más: la atribuida al hindú Bhaskara y una demostración china que nos muestra Loomis (1968) con los números 353 y 36.

Es conveniente citar también las demostraciones metodológicas de Meavilla (1989), en ellas se ofrecen una sucesión de figuras en las que determinados elementos cambian de forma, se dividen, se desplazan y dan lugar a nuevas configuraciones mediante las cuales el alumno descubre la proposición, como si estuviera viendo un comic sin palabras. Esta demostración es fácilmente traducible mediante un programa dinámico como GeoGebra.

Relativo a los problemas que el profesor debe plantear a los alumnos, queremos completar este apartado presentando algunos problemas que aunque simples, tienen el interés de haber sido planteados en otros períodos de tiempo o culturas y resueltos de una forma diferente a como actualmente lo harían nuestros alumnos.

En Barrantes(1998) se muestran los siguientes problemas que nos corroboran una vez más como todas las sociedades valoraban la utilidad del Teorema de Pitágoras.

- Una viga de 30 dm de largo está de pie apoyada a una pared, si la parte superior se desliza una distancia de 6 dm sobre la pared ¿ Cuánto se deslizó el otro extremo de la viga? (Babilonia 1600 a.C.-1800 a.C.)

- La altura de un muro es de un metro. Un palo de desconocida longitud se inclina contra él de forma que su extremo superior toca el extremo superior del muro. Si la parte

inferior del palo se separa un dm del muro, el palo caerá al suelo ¿Cuál es la longitud del palo? (China 300 a.C.)

- Una lanza de 2 m de longitud se inclina hacia una torre. Si el extremo final se separa 12 dm¿Qué distancia habrá entre la lanza y la parte superior de la torre? (Italia 1300 d.C.)

Como ejemplo, también Swetz (1989) nos plantean dos problemas:

Encontrar el cuadrado, de mayor área, inscrito en un triángulo rectángulo uno de cuyos ángulos sea el vértice del ángulo recto.

Encontrar el radio de la circunferencia inscrita en dicho triángulo.

Estos problemas planteados, así sin más, pasarían por dos problemas corrientes de la lista final de ejercicios de una lección de un libro de texto. Sin embargo, si le añadimos la intriga de que dichas cuestiones eran ya planteadas hace 2000 años en China, concretamente por Jin Zhang Svanshu en sus *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*, éstas adquieren un carisma distinto que motiva a nuestros alumnos a buscar la solución. Además, dicha solución puede ser comparada con el método de resolución chino, basado en una malla cuadriculada, y que podemos consultar en el artículo anteriormente citado. El segundo problema nos sugiere, también, la proposición demostrable:

Cuando el triángulo rectángulo es de lados enteros, el radio de la circunferencia inscrita es siempre un número entero.

También, en Dalcín y Olave (2007) encontramos una serie de problemas babilonios, chinos, etc. de la antigüedad cuyos anunciados podrían pasar por actuales si los alumnos no conocen el dato de su antigüedad y procedencia.

Actividades con puzles en el laboratorio de matemáticas.

Sería conveniente, como docentes, que analizáramos la cantidad de problemas aburridos y estériles que planteamos a nuestros alumnos, debido a una serie de restricciones que imponemos absurdamente a dichos problemas, con las que solamente conseguimos delimitar las posibilidades que estos admiten. En el caso de la propiedad pitagórica, las actividades de aula, muchas veces, que dan reducidas a: comprobar si varias ternas de cuadrados cumplen la propiedad; realizar la demostración cuadriculando los cuadrados de los catetos y la hipotenusa, y a la aplicación o realización de ejercicios numéricos con unas técnicas de resolución prefijadas.

Sin embargo, el teorema de Pitágoras puede ser presentado y trabajado como una situación abierta que admite muchas más posibilidades y formas de trabajo que, a su vez, dan lugar a nuevas cuestiones que predisponen a los alumnos para conocer nuevos conceptos y concebir el teorema desde una perspectiva más amplia y enriquecedora (Barrantes, 1990).

A continuaciónpresentamos diversos puzles y una serie de actividades con ellos que trabajan la propiedad pitagórica como un problema abierto accesible a los alumnos y motivante, en el sentido de que todos quieren manipularlos para resolverlo.

EnBarrantes (1998) se presenta la demostración de teorema construida mediante puzles de diferentes piezas. Vamos a describir dos de estos puzles, concretamente, los llamados de cinco y de tres piezas.

El puzle de cinco piezas consta de dos triángulos rectángulos iguales y tres cuadrados de lados iguales, respectivamente, a los catetos y la hipotenusa de los triángulos rectángulos (fig. 4. derecha). Como base para la demostración se utilizan dos cuadriláteros iguales (fig.4 abajo izquierda) de lado mayor la suma de las diagonales de los dos cuadrados menores y los otros tres lados son iguales a los lados del triángulo rectángulo.

La demostración con este puzle es muy intuitiva pues consiste en cubrir primeramente la base con los dos triángulos y los dos cuadrados menores (fig. 4 derecha), y posteriormente con los dos triángulos y el cuadrado mayor (fig. 4 arriba izquierda). Como en las dos actividades cubrimos el mismo área queda demostrado que la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos será igual al área del cuadrado de la hipotenusa.

Figura 4. Puzle de 5 piezas y una base.

Las actividades que realizan esta demostración serían:

- Coloca los dos cuadriláteros unidos por el lado mayor y de forma simétrica, después cubre los cuadriláteros con los dos triángulos y los dos cuadrados menores.

2- Partimos otra vez de los dos cuadriláteros unidos por el lado mayor pero de forma no simétrica. Ahora colocamos sobre ellos el cuadrado grande y los dos triángulos.

3- Saca conclusiones relativas a la relación entre las áreas de los tres cuadrados.

El puzle de tres piezas son dos triángulos rectángulos iguales y una pieza pentagonal (fig.5) que junto con los dos triángulos encajan perfectamente en una caja que equivale a los dos cuadrados de los catetos del triángulo rectángulo (pieza 1). En este caso, la demostración consiste en formar con las tres piezas primeramente los dos cuadrados de los catetos, es decir colocar las piezas en la caja (fig.5 izquierda), y después, sacando las piezas de la caja, formar el cuadrado de la hipotenusa (fig. 5 derecha)

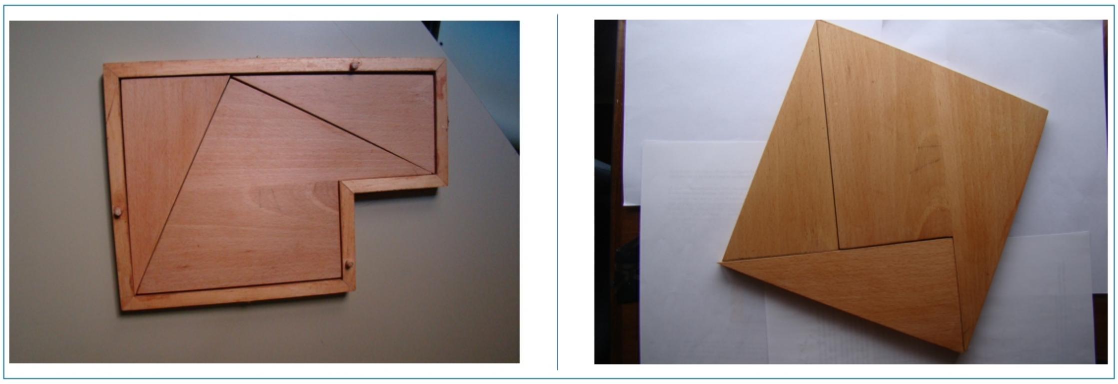


Figura 5. Puzle de tres piezas.

La principal curiosidad, de este puzle de tres piezas, radica en que es el de menor número de piezas que nos permite mostrar la propiedad pitagórica.

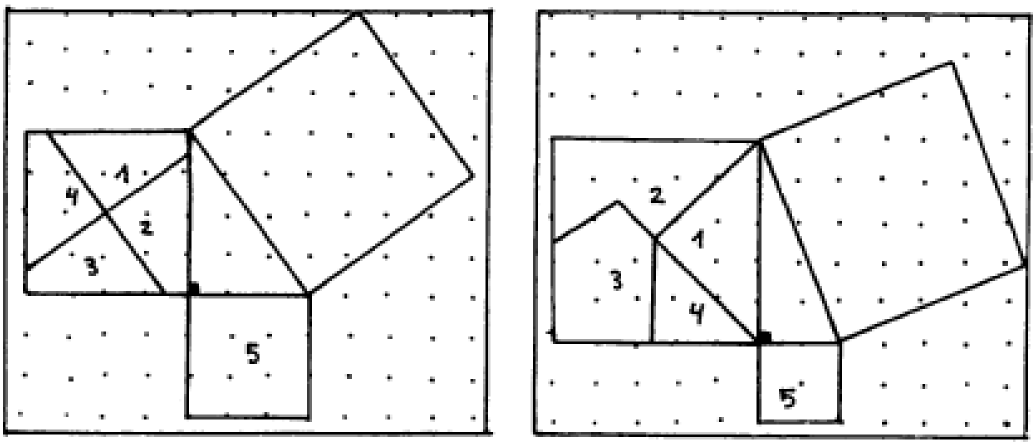


Figura 6. Puzles de los alumnos (Barrantes, 1990).

Las actividades podrían plantearse de la siguiente forma:

- Coloca las tres piezas en la caja.

- Observa los dos cuadrados que se forman. Deduce la relación entre los lados de los cuadrados y los catetos de la pieza rectángulo.

- ¿Podrías formar un cuadrado con estas tres piezas cuyo lado sea la hipotenusa del triángulo rectángulo?

-Saca conclusiones relativas a la relación entre las áreas de los tres cuadrados.

Así pues, consideramos el teorema como un problema abierto, accesible a los alumnos y a la vez motivante, mediante la utilización de recursos y materiales apropiados como son los puzles pitagóricos con los que se pueden realizar diferentes demostraciones del teorema, e incluso el alumno puede realizar su propia demostración como se muestra en la figura 6.

Si queremos seguir trabajando el Teorema, podemos ampliar el estudio de la proposición pitagórica pues no es válida únicamente para los cuadrados de lados los catetos y la hipotenusa, sino para cualquier polígono construido sobre los lados del triángulo rectángulo, siempre que los tres polígonos, así construidos, sean semejantes entre sí.

En efecto, como la relación de superficies entre figuras semejantes solo depende del cuadrado de uno de sus lados, las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los lados se van a poder expresar como kb^2, ka^2, kc^2, donde el valor de k va a depender de la forma de la figura. Si las figuras son semejantes se va a verificar que:

$$kb^2 + ka^2 = kc^2$$

donde a, b, y c son los catetos e hipotenusa, respectivamente, del triángulo rectángulo.

En Vasquez (2012) se presentan distintas demostraciones algebraicas para distintos casos como rectángulos semejantes o triángulos equiláteros, polígonos irregulares semejantes, y la extensión a semicírculos entendidos como polígonos de infinitos lados.

En nuestra línea de mostrar la propiedad mediante puzles, podemos ver en la figura 7, distintas construcciones del teorema y ampliado a triángulos semejantes, trapecios y otra figura irregular, hechas por nuestros alumnos.

Figura 7. El Teorema de Pitágora en puzles.

Podemos decir que la generalización de la propiedad no es sólo para polígonos, sino para figuras cualesquiera que verifiquen la condición de semejanza. Así pues, los alumnos pueden comprobar que se verifica para semicírculos, cuartos de círculos, segmentos o sectores circulares. En este caso, como el troceado en puzles ya no es posible, calculamos numéricamente las áreas de dichas figuras derivadas del círculo. A partir de aquí, surge un tipo de actividades que llamamos de figuras mixtas en las que se conjugan formas poligonales con formas circulares (fig. 8).

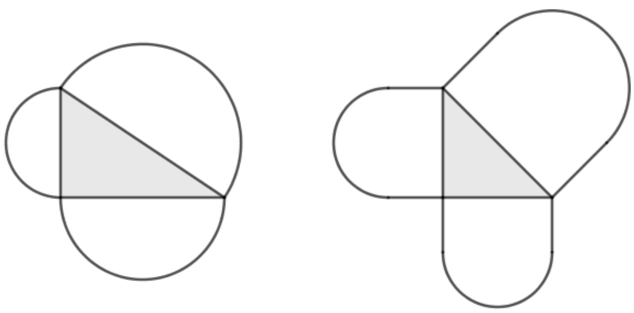


Figura 8. Ampliación a figuras redondas.

Actividades dinámicas con Geogebra.

Para trabaja el Teorema de Pitágoras mediante Geogebra hicimos un estudio previo de revisión bibliográfica que hemos comentado en el primer apartado de este artículo.

A partir de esa bibliografía se revisaron las demostraciones desechando aquellas que tenían semejanzas con otras demostraciones, o aquellas que consideramos no adecuadas a los niveles educativos escolares al cual fue orientando la revisión, debido a la propia complejidad de éstas.

Posteriormente se hizo una selección definitiva de las demostraciones, perfilando una clasificación por niveles, obteniéndose la Tabla 1.

GEOMÉTRICAS		ALGEBRAICAS
1° ESO	2° ESO	4° ESO
1.Puzzle 1: Hipotenusa/cateto menor = 3	**7**.Euclides (L. 33)	**19**.Bashkara (L. 36)
2.Puzzle 2: 30° ≤ A ≤60° y 30° ≤ B ≤ 60°	**8**.Liu Hui (L. 28)	**20**.Chou Pei Suan (L. 253)
3.Puzzle 3: Cateto mayor/cateto menor = 2	**9**.Platón (L. 98)	**21**.Pappus (L. 42)
4.Puzzle 4: Triángulo rectángulo isósceles	**10**.Dobriner (L. 18)	**22**.Vieta (L. 63)
5.Puzzle 5: Lados 3, 4 y 5	**11**.Perigal (L. 205)	**23**.Garfield (L. 231)
6.Caso Particular (L. 4)	**12**.Ozanam (L. 16)	**24**. L. da Vinci (L. 46)
	13.J. Adams (L. 27)	**25**.H. Boad (L. 90)
	14.Hoffmann (L. 240)	**26**.Loomis 108
	15.Loomis 2	**27**.Thâbit Ibn Qurra (a)
	16.Loomis 26	**28**.Thâbit Ibn Qurra (b)
	17.Poo-Sung-Park	
	18.A. G. Samosvat	

Tabla 1. Demostraciones seleccionadas del Teorema de Pitágoras

En esta tabla encontramos 28 demostraciones del Teorema de Pitágoras que hemos realizado con GeoGebra.Éstas demostraciones pueden ser consultadas de manera electrónica en el Libro de GeoGebra "Pruebas del Teorema de Pitágoras", en la página web: https://www.geogebra.org/m/j6wRRyxB. Estas demostraciones se presentan como unas fichas en las que se incluyen, además de la demostración correspondiente, elementos didácticos como el procedimiento y la explicación.

Estas demostraciones, se han clasificado de acuerdo al nivel educativo ESO (Enseñanza Educativa obligatoria, 12-16 años) para el que están orientadas, de manera que seis corresponden a 1º ESO, doce pruebas son para 2º ESO y diez para 4º ESO (en 3º ESO no se imparte el teorema).

Atendiendo a los niveles de Van Hiele y al desarrollo madurativo de los alumnos, las pruebas dirigidas a 1º ESO, son básicamente pruebas puzles, de manera que las piezas en que se dividen los cuadrados construidos sobre los catetos deben rellenar todo el área del cuadrado de la hipotenusa. Esta es una forma motivante para trabajar la relación pitagórica, ya que ayuda al alumno a desarrollar un comportamiento más inteligente que de tipo reflejo o automático.

Las pruebas geométricas dirigidas a 2º ESO, son pruebas realizadas por matemáticos célebres o personalidades de otros campos, simpatizantes de las matemáticas que han tenido la tentación de realizar una prueba de dicho teorema. Aparecen en la tabla con el nombre del autor y si es una demostración de Loomis (1972) lo indicamos entre paréntesis,así como el número al que corresponde en dicho texto. Y por último, las pruebas algebraicas de 4º ESO, son también pruebas realizadas por celebridades de todos los tiempos.

A continuación, exponemos tres ejemplos de las construcciones dinámicas construidas mediante GeoGebra y las explicamos de una forma más pormenorizadas.

Ejemplo 1: Prueba de Platón.

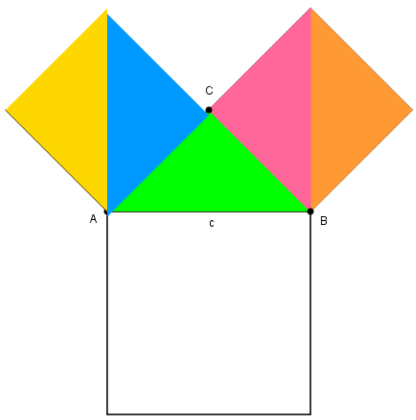
Esta demostración es la número 9 de la tabla, es una prueba de tipo geométrica indicada para 2º ESO, ya que a manera de puzle se puede observar como encajan todas sus piezas. Es mejor conocida como la prueba de Platón, siendo además clasificada en Loomis (1972) como la prueba número 98 como se puede leer en la tabla 1.

Esta demostración aparece en el diálogo *Menón o de la virtud* de Platón. El alumno puede conocer que Platón era un famoso filósofo griego seguidor de Sócrates y maestro de Aristóteles.

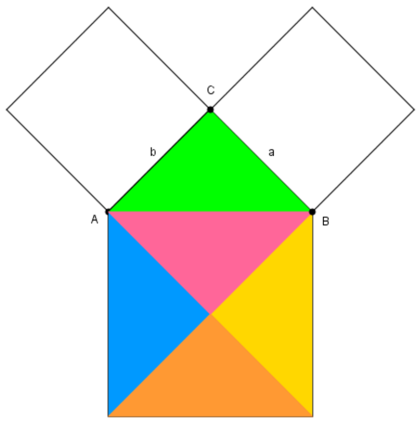
La prueba aplica el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles en el que los cuadrados construidos sobre los dos catetos (lados iguales) pueden ser divididos en dos triángulos con base la diagonal obteniéndose así cuatro triángulos que encajan perfectamente en el cuadrado construido sobre la hipotenusa (lado desigual).

FICHA: Prueba de Platón (Loomis 98)

Momento 1



Momento 2



Procedimiento:

1. Se construye el triángulo rectángulo ABC (verde)

2. Se construyen cuadrados sobre todos sus lados

3. Se construyen dos triángulos de igual área (amarillo, verde) en el cuadrado construido sobre el cateto de lado b

4. Se construyen dos triángulos de igual área (rosa, naranja) en el cuadrado construido sobre el cateto de lado a

5. Se trasladan estos cuatro triángulos hasta cubrir el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo ABC

Explicación: Al trasladar los cuatro triángulos congruentes construidos en los cuadrados de lados iguales a las longitudes de los catetos del triángulo ABC se observa que estos son congruentes con el área del cuadrado de lado igual a la longitud de la hipotenusa del triángulo ABC. Eso es, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Demostración: Como se puede observar la demostración es puramente visual, por lo que no tiene sentido realizar cálculos algebraico.

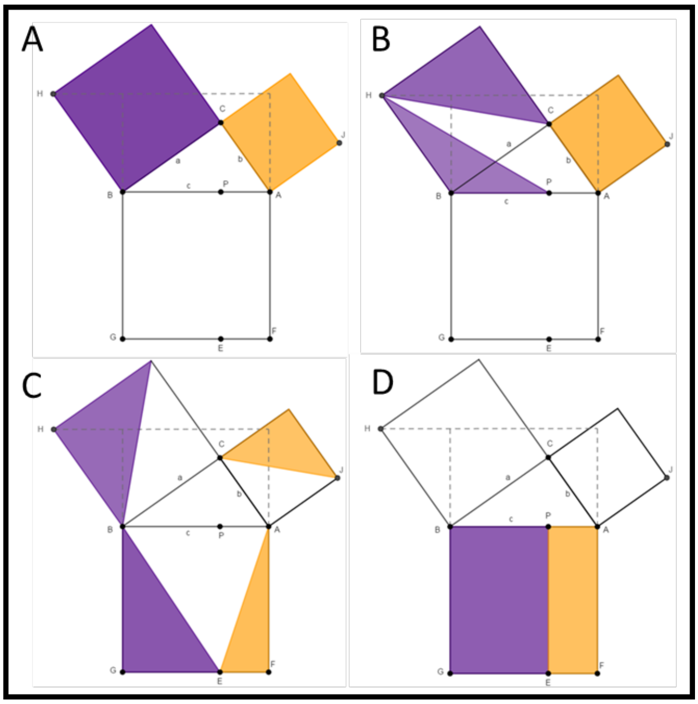
Ejemplo 2: Demostración de Euclides.

Esta demostración de la relación pitagórica aparece en la tabla 1 con el número 7. Es es una prueba de tipo geométrica (comparación de áreas equivalentes)indicada para 2º ESO.Es conocida como la prueba de Euclides y es clasificada en Loomis (1972) como la prueba número 33.

Euclides fue el primer matemático en demostrar geométricamente el Teorema de Pitágoras. Dicha demostración se encuentra en su libro *Los Elementos*numerada comoI.47.El alumno puede investigar también sobre dicho texto y saber que comienza con la definición de "punto" y terminacon el Teorema de Pitágoras enunciado a la inversa: *Si la suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo, es igual al cuadrado del tercer lado, se trata de un triángulo recto.*La demostración basada en equivalencia de triángulos, también, puede ser consultada en Thomas(1985) donde aparece de una forma convenientemente desarrollada.

FICHA: Prueba de Euclides (Loomis 33)

Momentos



Procedimiento:

1. Se construye el triángulo rectángulo ABC

2. Se construyen cuadrados sobre todos sus lados

3. Se construye una recta perpendicular CPE a la hipotenusa

4. Se dividen los cuadrados construidos sobre los catetos en triángulos semejantes

6. Se traslada el cuadrado construido sobre el cateto mayor al rectángulo BPEG

7. Se traslada el cuadrado construido sobre el cateto menor al rectángulo PAFE

Explicación: La recta CPE divide el cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo ABC en dos rectángulos que tienen áreas iguales a las de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo inicial. Es decir, el área del rectángulo BPEG es igual al área del cuadrado construido sobre el cateto mayor y el área del rectángulo PAFE es igual al área del cuadrado construido sobre el cateto menor del triángulo ABC. Es decir, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Demostración: Sean a y b los catetos del triángulo rectángulo ABC y c su hipotenusa, además, A_1 es la suma del área de los cuadrados construidos sobre los catetos y A_2 el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, esto es: $A_1 = a^2 + b^2$ y $A_2 = c^2$.

Dividimos por la diagonal el cuadrado del cateto mayor obteniendo dos triángulos uno de los cuales es △BHC. El triángulo △BHC tiene el mismo área que el triángulo ΔHBA porque la altura sobre la base BH es la misma.Se puede comprobar que en los dos casos tienen la misma medida que el segmento BC por construcción del triángulo rectángulo.

Se tiene que $\angle HBA = \angle CBG$ ya que cada uno de ellos es $\angle CBA + 90°$ $\Delta HBA \ y \, \Delta CBG$ son congruentes y su área es la misma área. También, el área de ΔCBGes igual al área de ΔBGPporque la altura sobre la base BG es la misma. Se puede comprobar que en ambos casos es la medida del segmento BP.

Luego el área deΔHBCes igual al área de △BGP. Haciendo lo mismo con el otro triángulo formado en el cateto mayor llegamos a que el rectángulo BPEG es igual al cuadrado sobre el cateto mayor. Si dividimos ahora el cuadrado del cateto menor de igual forma, se llega a que el rectángulo PAFE es igual al cuadrado sobre el cateto menor. Como $A_1=A_2$, se tiene que, $a^2+b^2=c^2$

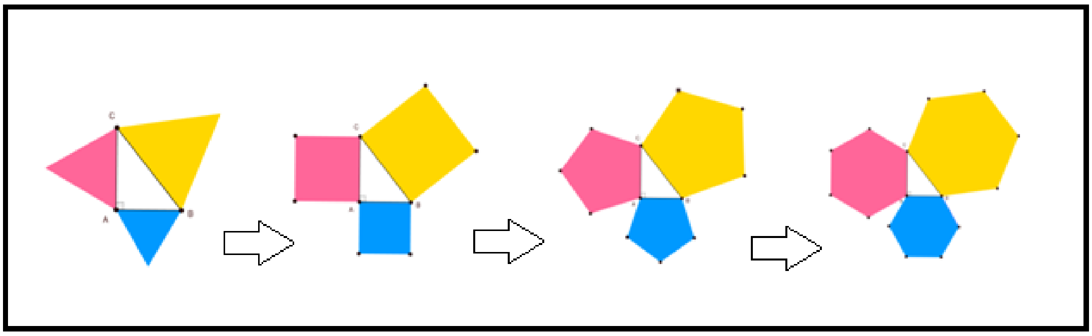
Ejemplo 3: Prueba Loomis de ampliación del Teorema.

Esta demostración aparece en la tabla con el número 26, es una prueba de tipo algebraica y es más indicada para 4º ESO. Es una extensión del teorema, como hemos comentado en la revisión bibliográfica, y es clasificada en Loomis (1972) con el número 108 (algebraicas) y la autoría es del mismo autor.

En 1933, Loomis, matemático estadounidense, plantea una extensión del Teorema de Pitágoras en la que establece que la relación pitagórica se mantiene para cualquier polígono regular construido a partir de triángulos isósceles construidos sobre el triángulo inicial.La propiedad pitagórica no es válida únicamente para los cuadrados de lados los catetos y la hipotenusa, sino para cualquier polígono construido sobre los lados del triángulo rectángulo, siempre que los tres polígonos, así construidos, sean semejantes entre sí.

FICHA: Ampliación teorema

Momentos



Procedimiento:

1. Se construye el triángulo rectángulo ABC (blanco)

2. Se construyen polígonos regulares sobre sus lados: triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos, heptágonos, etc.

3. Se comparan las áreas de estos polígonos para comprobar la relación pitagórica

Explicación: La misma relación pitagórica establecida con los cuadrados construidos a partir de los lados de un triángulo equilátero, es mantenida si construimos sobre los lados del triángulo equilátero polígonos regulares. Es decir, cualquier polígono regular de lado igual a la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los polígonos regulares construidos de lados igual a la longitud de los catetos del triángulo rectángulo.

Demostración: En efecto, como la relación de superficies entre figuras semejantes solo depende del cuadrado de uno de sus lados, las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los lados se van a poder expresar como kb^2, ka^2, kc^2, donde el valor de k va a depender de la forma de la figura. Si las figuras son semejantes se va a verificar que $kb^2 + ka^2 = kc^2$, donde a, b, y c son los catetos e hipotenusa, respectivamente, del triángulo rectángulo.

En el primer caso, como los triángulos son equiláteros la constante K vale:

k = ¼ de la raíz cuadrada de 3

en las demás figuras regulares:

k= n /(4tg(180/n)) donde n es el número de lados

Se puede seguir estudiando abordando algunos problemas, juegos y curiosidades de interés que están vinculados con el teorema como son: los cuadrados mágicos pitagóricos, el teorema inverso, problemas históricos, generalización al espacio y a la geometría sólida, la relación de la proposición con la sucesión de Fibonacci, con los fractales y algunas curiosidades más que se recogen en Barrantes (1998). Podemos ver la cantidad de posibilidades que admite el estudio del Teorema de Pitágoras relacionadas con la enseñanza, por eso, hemos añadido en la webgrafía diferentes páginas para los profesores que quieran seguir estudiando el tema.

Conclusiones

Hemos presentado un conjunto de actividades dinámicas sobre Teorema de Pitágoras trabajadas en el laboratorio de matemáticas mediante la metodología de resolución de problemas y otras construidas con GeoGebra de manera selectiva, en base a una revisión en el que se incluyeron elementos didácticos (procedimiento y explicación) para favorecer su uso en el proceso enseñanza-aprendizaje del teorema.

Como docentes, en la mayoría de las veces no tenemos más recurso que el libro de texto para trabajar el Teorema de Pitágoras, Normalmente estos textos solamente nos presentan problemas aburridos y estériles que planteamos a nuestros alumnos, debido a una serie de restricciones que imponemos absurdamente a dichos problemas, con las que solamente conseguimos delimitar las posibilidades que estos admiten.Estas actividades, consideramos, son un recurso importante para que el profesor trabaje la propiedad pitagórica de una manera activa y dinámica pudiendo además seleccionar, entra la gran variedad de tareas que ofrecemos, las que considere más acordes para el aprendizaje desus alumnos.

El estudio propone al alumnado diferentes demostraciones clásicas de la proposición pitagórica a la vez que se revaloriza la importancia de la prueba pitagórica, haciéndoles observar la cantidad de personas famosas, matemáticos o no, que se han preocupado por ella.

Las actividades realizadas permiten explorar visualizaciones de la prueba pitagórica favoreciendo la construcción de conocimientos, a través de la manipulación directa con los puzles y del software de geometría dinámica; acciones que serían más trabajosas utilizando lápiz y papel. Los alumnos experimentan dificultades y logros de actividades que, aunque parecen actuales, han sido planteados y resueltos hace muchos siglos

Entendemos que el uso de software de geometría dinámica se ha convertido en un recurso que, combinado con el correcto uso del profesor, puede favorecer el aprendizaje en los alumnos debido al dinamismo en las construcciones, lo que permite que haya una interacción entre el conocimiento, el alumno y el profesor a través de las construcciones geométricas.

Evidenciamos de esta manera la importancia y posibilidades que tiene el Teorema de Pitágoras dando lugar a un sin número de demostraciones y aplicaciones que lo convierten en un auténtico problema abierto de la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Referencias bibliográficas

Barrantes, M. y Revilla, D. (1988). Geometría para profesores de E.G.B. *Campo Abierto*, 5, 209-227.

Barrantes, M. (1990). Pitágoras en el país de los puzles. *Campo Abierto*. Revista de Educación, 7(1), 221-230.

Barrantes, M. (1998). *La geometría y la formación del profesorado en primaria y secundaria*. Manuales UEX, Nº 22.Unex. Badajoz

Barrantes, M. y Barrantes, M.C. (2017). *Geometría en la Educación Primaria*. Ed. Indugrafic digital. Badajoz.

Bergua, J. B. (1958). *Pitágoras*. Ed.Ibéricas. Madrid.

Caniff, P. (1997).*Pitágoras*. M.E. Editores, S.L. Madrid.

Dalcín, M. y Olave, M. (2007). Resolución de problemas antiguos que involucran al Teorema de Pitágoras. En Crespo, C. (ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol 20, Editorial Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., 31-36.

Flores, A. (1992). La feria de Pitágoras. *Educación Matemática*, 40), 66-83, 4(2), 62-78.

González, P. M (2001).*Pitágoras. El filósofo del número*. Nivola.Madrid,2001

González, P.M. (2008). El teorema de Pitágoras: Una historia geométrica de 4.000 años. *Sigma*,32,103-130.

Loomis, E. S. (1968): *The Pythagorean Proposition*. Reprint, Classics in Mathematics Education series, Wahington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.

Loomis, E. S. (1972):*The Pythagorean Proposition.*, National Council of Teachers of Mathematics.Wahington, D.C., USA.

Meavilla, V. (1989): Dos demostraciones dinámicas del Teorema de Pitágoras. *Suma*, 3,39-42.

Nelsen, R. (1993). *Proofs without word: Exercises in visual thinking.* The Mathematical Association of America. Washington D.C., USA

Strathern, P. (1999): *Pitágoras y su teorema*. Siglo XXI de España Editores. Madrid,

Schuré, E. (1995): *Los grandes iniciados*. Vol. II. REI Argentina. Buenos Aires.

Swetz, J.F. (1989): Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction. *The Mathematics Teacher*, 82 (5), 370-377.

Thomas, I. (1985): Matemáticos griegos. En *Enciclopedia Sigma* 1, 116-135. Ed. Grijalbo. Barcelona.

Vasquez, M.V.(2012). Una ampliación al teorema de Pitágoras. Revista de Educación Matemáticas. Vol 27(3)

Yanney, B. F. y Calderhead, J. A.(1896).New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *American Mathematical Monthly*, 3, 65-67, 110-113, 169-171 y 299-300.

Yanney, B. F. y Calderhead, J. A.(1897). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *American Mathematical Monthly*, 4, 11-12, 79-81,168-170, 250-251 y 267-269.

Yanney, B. F. y Calderhead, J. A.(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *American Mathematical Monthly*, 5, 73-74.

Yanney, B. F. y Calderhead, J. A.(1899). New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem. *American MathematicalMonthly*, 6 , 33-34 y 69-71.

Webgrafía

https://www.geogebra.org/m/j6wRRyxB

El Libro de GeoGebra "Pruebas del Teorema de Pitágoras", creado por Álvaro Mejía, contiene 28 applets que contienen pruebas dinámico-geométricas y dinámico-algebraicas sobre la relación pitagórica.Esta es la página base de los resultados de la investigación.

https://www.geogebra.org

Es la página oficial de GeoGebra, software de geometría dinámica que permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales.

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/

Es la página webdel *Proyecto Gauss* que brinda al profesorado una gran variedad de ítems didácticos y de applets de GeoGebra, que cubren todos los contenidos de matemáticas de Primaria y de Secundaria.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web

La web del *Proyecto Descartes* ofrece materiales didácticos interactivos, basados en la visualización y en la interacción con los elementos matemáticos, para los niveles de Primaria, ESO y Bachillerato

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/

La página *Webs interactivas de Matemáticas*, agrupa diversos temas de los currículos de Matemáticas de ESO y Bachillerato en la que, mediante gráficos interactivos, el alumno recibe una ayuda significativa para la comprensión de la matemática.

http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/

El sitio web *Actividades con GeoGebra* incluye actividades de matemática realizadas con GeoGebra en la que se facilitan recursos para la enseñanza de la geometría a nivel de la ESO y de Bachillerato.

http://tube.geogebra.org/student/b615817#

El Libro de GeoGebra *Proofs Without Words* creado por Steve Phelps, contiene 30 demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras en formato de Hojas Dinámicas.

http://www.geogebra.org/m/1988309

En el Libro GeoGebra *Puzzles Pitagóricos*,creado por Matías Arce, contieneapplets con varios de los puzzles pitagóricos más famosos de la historia.

https://www.geogebra.org/m/BnPMKV3z

El Libro de GeoGebra *Teorema de Pitágoras*, creado por Vicente Martín Torres, contiene 30 applets que tratan sobre demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras.

https://es.scribd.com/document/224732256/Teorema-de-Pitagoras-Algunas-demostraciones-del-pdf

Página de Fco. Javier García Capitán. Demostraciones resultantes de relaciones de semejanza de triángulos.Demostraciones basadas en propiedades métricas de la circunferencia, en la comparación de áreasy por disección.

http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/

Página de Alexander Bogomolny dedicada al teorema de Pitágoras y susmuchas demostraciones.

http://www.mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html

Página de Eric Weisstein, en la que además de algunas demostraciones,puede encontrarse una extensa bibliografía.

http://elcuadradodelahipotenusa.blogspot.com.es/

Este blog incluye 25 demostraciones del teorema dentro de los diferentes contextos históricos.

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml.

PythagoreanTheorem. Una colección de 118 enfoques para probar el teorema. Muchas de las pruebas están acompañadas por ilustraciones interactivas de Java.