

## Resolviendo la ecuación del movimiento armónico amortiguado mediante algunos métodos numéricos

### Solving the equation of dampening harmonic motion using some numerical methods

Salustiano Vega<sup>1,\*</sup>, Jorge Jara<sup>2</sup>, Osvaldo Vega<sup>3</sup>, Gustavo González<sup>3</sup> & Crispín Vargas<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad Nacional de Asunción, Facultad Politécnica, Departamento de Ciencias Básicas, San Lorenzo, Paraguay.

<sup>2</sup>Universidad Nacional de Asunción, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Física, San Lorenzo, Paraguay.

<sup>3</sup>Universidad Nacional de Asunción, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemática, San Lorenzo, Paraguay.

\*Autor correspondiente: [svega@pol.una.py](mailto:svega@pol.una.py).

**Resumen:** El modelo del movimiento armónico amortiguado es uno de los temas abordados en el área de la matemática y de física, su representación mediante ecuaciones diferenciales es el motivo principal de su estudio. Usualmente se analiza el caso más simple para obtener una solución analítica real, en el que las técnicas usuales de resolución impartidas para describir el movimiento armónico amortiguado consideran pequeñas intensidades de amortiguamiento. Sin embargo, el análisis mediante ciertos métodos numéricos que resuelven de manera aproximada ecuaciones diferenciales ordinarias permitirá resolver numéricamente este modelo y proporcionar diferentes técnicas de resolución. En este trabajo se resolverán numéricamente la ecuación diferencial que describe el movimiento armónico amortiguado. Se propondrán algunas condiciones iniciales a la ecuación diferencial y se implementarán las funciones ODE23, ODE45 y ODE 113 de *Matlab* y algunos algoritmos numéricos clásicos, tales como los métodos, de *Euler Back* de primer orden, de *Runge Kutta* de segundo orden, de *Adams Moulton* de tercer orden y de *Runge Kutta* de cuarto orden. Se realizará finalmente, una comparación de los algoritmos numéricos y de las funciones de *Matlab* implementadas con la solución analítica exacta de la ecuación diferencial, así como con la solución exacta para la velocidad vertical de la masa.

**Palabras clave:** Ecuaciones diferenciales, Métodos numéricos, Algoritmo.

**Abstract:** The model of damped harmonic motion is one of the topics addressed in the area of mathematics and physics, its representation through differential equations is the main reason for its study. The simplest case is usually analyzed to obtain a real analytical solution, in which the usual resolution techniques taught to describe damped harmonic motion consider small damping intensities. However, analysis using certain numerical methods that approximate ordinary differential equations will allow us to solve this model numerically and provide different resolution techniques. In this work, the differential equation that describes the damped harmonic motion will be solved numerically. Some initial conditions for the differential equation will be proposed and the functions ODE23, ODE45 and ODE 113 of *Matlab* and some classical numerical algorithms will be implemented, such as the first-order Euler Back methods, the second-order Runge Kutta method, of Adams Moulton of the third order and de Runge Kutta of the fourth order. Finally, a comparison of the numerical algorithms and the implemented *Matlab* functions will be made with the exact analytical solution of the differential equation, as well as with the exact solution for the vertical velocity of the mass.

**Keywords:** Differential equations, Numerical methods, Algorithm.

## Introducción

La apariencia del movimiento armónico amortiguado generalmente está relacionada con un cuerpo de cierta masa unido a un extremo de una fuente elástica, permaneciendo fijo el otro extremo de dicha fuente. De hecho, es un tema estudiado en modelos matemáticos y físicos.

En términos matemáticos según Costa *et al.*, (2011), el estudio del movimiento armónico amor-

tiguado se desarrolla por medio de las ecuaciones diferenciales que, en la mayoría de los casos, por medio de métodos usuales de resolución, se obtiene una solución analítica para pequeñas intensidades de amortiguamiento.

Los trabajos realizados hasta el momento presentan diferentes enfoques y aplicaciones, por ejemplo, en (Pascual *et al.*, 2008) se realiza una simulación en Maple de la modelación del movimiento tanto

Recibido: 10/02/2023 Aceptado: 14/04/2023



2078-399X/2023 Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de Asunción, San Lorenzo, Paraguay. Este es un artículo de acceso abierto bajo la licencia CC BY 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.es>).

armónico simple como amortiguado, en (Serrano *et al.*, 2016) se presenta un caso del modelado y solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden considerando un sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado, resuelta analíticamente y simulada con el apoyo del software GeoGebra, en González (2009) se estudian las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden de coeficientes constantes que describe este problema con algunas aplicaciones físicas, en Rodríguez (2019). se construye un modelo matemático para explicar o describir la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos, mediante ecuaciones diferenciales de segundo orden de sistema masa resorte.

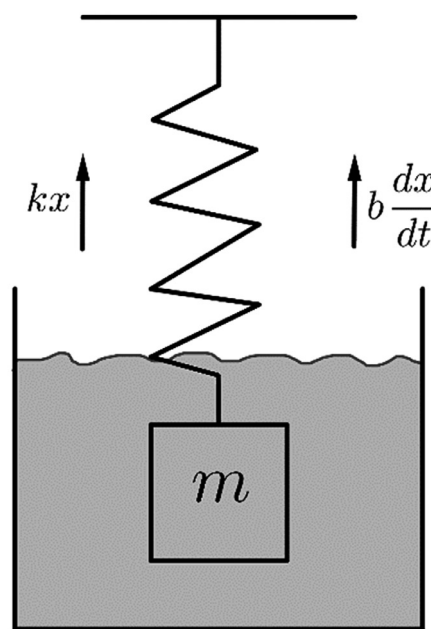
La motivación de este trabajo es encontrar soluciones numéricas adecuadas para la ecuación diferencial que describe el movimiento armónico amortiguado, implementando algunas funciones ODE de *Matlab*, así como métodos numéricos de diferentes órdenes, que permiten resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales establecidas.

El objetivo de este artículo es resolver numéricamente la ecuación diferencial del movimiento armónico amortiguado. Se implementarán las funciones ODE23, ODE45 y ODE113 de *Matlab* y algunos métodos numéricos de orden 1, de orden 2, orden 3 y orden 4 con condiciones iniciales a la ecuación diferencial del problema estudiado y posteriormente, se compararán con la solución analítica obtenida para pequeñas intensidades de amortiguamiento.

Según (Sears *et al.*, 2013) y Molina (2016), un sistema amortiguado es un esquema sencillo que se puede observar en la Fig. 1.

Se puede observar un cuerpo de masa  $m$  suspendido de un resorte de constante  $k$ , que oscila, tiene movimiento armónico amortiguado, cuando la fricción del medio sobre la masa  $f_r$  es directamente proporcional a la velocidad, esto es  $f_r = -b \frac{dx}{dt}$ , siendo  $b$  la constante de amortiguamiento y  $\frac{dx}{dt}$  es la velocidad de la masa.

Como la masa está sujeta a un resorte, entonces



**Figura 1.** Sistema de movimiento amortiguado.

estará sometida a una fuerza de origen elástica dada por la ecuación  $F = -kx$ , siendo  $k$  la constante elástica del resorte que depende de la geometría y del material del cual está hecho y  $x$  es la elongación del resorte a partir de su posición de equilibrio.

El efecto del peso no se considera porque se compensa con la deformación inicial que sufre el resorte al colgarle la masa  $m$  y de esta manera, se dice que el sistema está en la posición de equilibrio, se toma como positivo el desplazamiento hacia abajo, por eso los signos de la fuerza elástica y la retardadora se consideran negativos, pues actúan hacia arriba.

Para obtener la ecuación de movimiento se aplica la segunda ley de *Newton* al sistema masa resorte y se obtiene el siguiente resultado:

$$-b \frac{dx}{dt} - kx = ma$$

donde  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$  es la aceleración de la masa, de esta forma, el movimiento armónico amortiguado de la Fig. 1, quedará descrito por la ecuación di-

ferencial:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \dots \dots \dots (1)$$

De esta manera, mediante la aplicación de los métodos usuales de resolución, la solución analítica de la ecuación (1) para pequeñas intensidades de

amortiguamiento  $\left(\frac{b}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ , está dada por:

$$x(t) = A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(wt + \phi); \text{ con}$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \dots \dots \dots (2)$$

En la ecuación (2), las constantes de integración,  $A$ , y  $\phi$  (amplitud y desfase) se calculan de mediante las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow A = x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{b}{2m}x_0 + v_0}{wx_0}\right)^2};$$

$$\phi = \arctg\left(\frac{\frac{b}{2m}x_0 + v_0}{wx_0}\right)$$

## Métodos

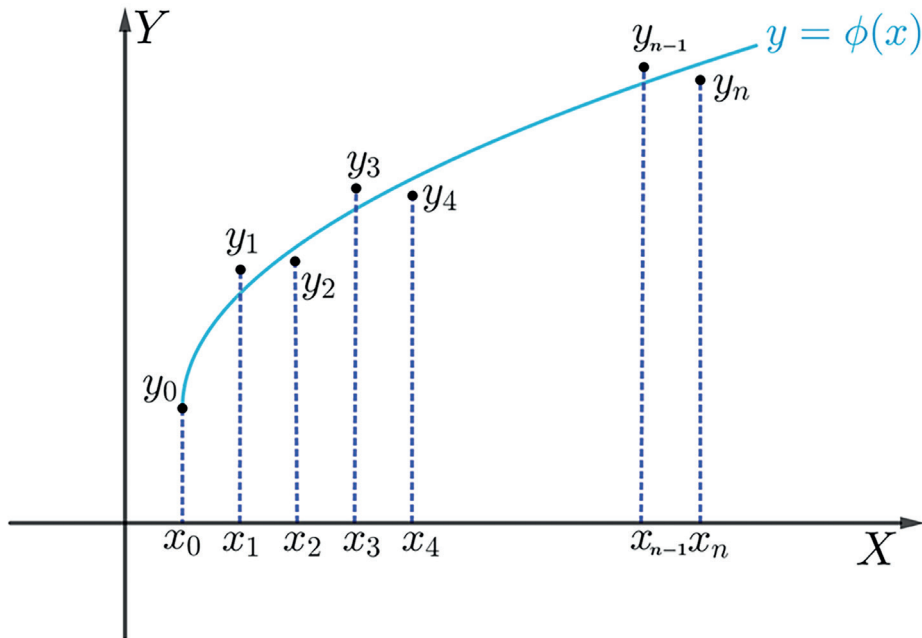
### Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales

En la mayoría de los casos, es muy difícil encontrar soluciones exactas de una ecuación diferencial por medio de métodos usuales, en este contexto, la aplicación de métodos numéricos es indispensable para obtener soluciones aproximadas. Generalmente según (Prima *et al.*, 2000), León (2015) y (Atkinson *et al.*, 2011), los métodos numéricos son utilizados añadiendo condiciones iniciales a la ecuación diferencial a estudiar.

Considere el problema de valor inicial de primer orden:

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0 \dots \dots \dots (3)$$

Sea  $y = \phi(x)$  una solución exacta única de la ecuación (3) en algún intervalo centrado en  $x = x_0$ , con el supuesto de que  $f$  y  $f_y$  son continuas en al-



**Figura 2.** Solución exacta y puntos aproximados.

Resolviendo la ecuación del movimiento armónico amortiguado mediante algunos métodos numéricos

gún rectángulo del plano  $xy$  que contenga al punto  $(x_0, y_0)$ .

Para encontrar soluciones aproximadas, en métodos numéricos se emplean **algoritmos iterativos de resolución** que calculan los valores aproximados  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  de la solución  $y = \phi(x)$  de la ecuación (3) en un conjunto de puntos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , como se muestra en la Fig. 2.

En la Fig. 2 se tiene que  $y(x_0) = y$  por el problema de valor inicial, pero  $\phi(x_n) \neq y_n$  para  $n \geq 1$ , además,  $\phi'(x_0) = f(x_0, y_0) = (y_0)'$  pero  $\phi'(x_n) = f(x_n, \phi(x_n)) \neq (y_n)'$  para  $n \geq 1$ .

También sobre el eje  $x$  se realizará un espaciamiento o tamaño de paso uniforme  $h$ , así entonces

$$x_1 = x_0 + h; \quad x_2 = x_0 + 2h; \dots; \quad x_n = x_0 + nh.$$

Los métodos numéricos se dividen en dos grupos, **métodos de un paso** donde se utiliza la solución aproximada  $y_n$  en  $x_n$  para obtener la solución aproximada  $y_{n+1}$  en  $x_{n+1}$  y en los **métodos multipaso** la solución  $y_{n+1}$  se obtiene utilizando el valor o los valores de solución calculados en los puntos anteriores.

El **orden** de un método numérico es un entero no negativo  $p$  de modo que  $|\phi(x_n) - y_n| \leq c h^p$  para alguna constante  $c$ .

En este artículo, se utilizarán métodos numéricos de un paso y multipaso conjuntamente, además se implementarán y se compararán según el orden de los mismos.

### Métodos numéricos implementados en la resolución

Los siguientes métodos numéricos implementados en este artículo, resuelven numéricamente el problema de valor inicial (3), en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , donde  $x_0 = a$ ,  $x_{n+1} = b$  y en  $N$  pasos. Primeramente se divide el intervalo  $[a, b]$  en  $N$  partes iguales de longitud  $h = \frac{b-a}{N}$  y posteriormente se aplica el algoritmo correspondiente a cada método.

### Método de *Euler backward* de orden 1.

**Datos:**  $x_0, y_0, h, f(x, y), N$ .

**Algoritmo:**

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h. \\ y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}). \\ n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases}$$

### Método de *Runge Kutta* de orden 2.

**Datos:**  $x_0, y_0, h, f(x, y), N$ .

**Algoritmo:**

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h. \\ y_{n+1} = y_n + h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h f(x_n, y_n)\right). \\ n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases}$$

### Método de *Adams Moulton* de orden 3.

**Datos:**  $x_0, x_1, y_0, y_1, h, f(x, y), N$ .

**Algoritmo:**

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h. \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{12}h(5f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 8f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})). \\ n = 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases}$$

### Método de *Runge Kutta* de orden 4.

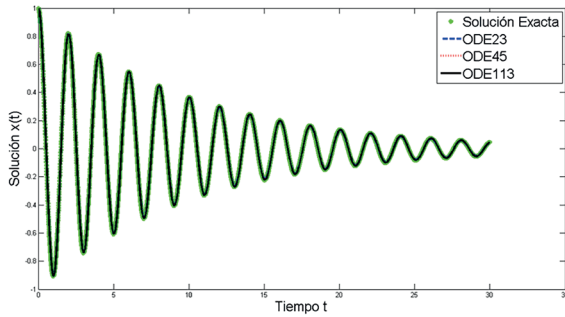
**Datos:**  $x_0, y_0, h, f(x, y), N$ .

**Algoritmo:**

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h. \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h \left[ f(x_n, y_n) + 2f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right) + \frac{1}{6}h \left[ 2f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right)\right) + \frac{1}{6}h \left[ f\left(x_n + h, y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right)\right)\right) \right] \right] \right]. \\ n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1. \end{cases}$$

### Las funciones ODE de *Matlab*.

Las funciones ODE de *Matlab* proporcionan una solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias con problemas de valores iniciales, cuando es difícil encontrar la solución analítica de la men-



**Figura 3.** Soluciones numéricas para  $x(t)$  en el intervalo  $[0, 30]$ , con  $h = 0.0075$ ,  $N = 400$ ,  $m = 1$ ,  $b = 0.2$  y  $k = 9.81$ .

cionada ecuación diferencial. Se implementaron debido a la ineficiencia del método de *Euler* en las aplicaciones. [9]

En este trabajo se implementarán las funciones ODE23, ODE45 y ODE113 para resolver la ecuación (1) con algunas condiciones iniciales establecidas.

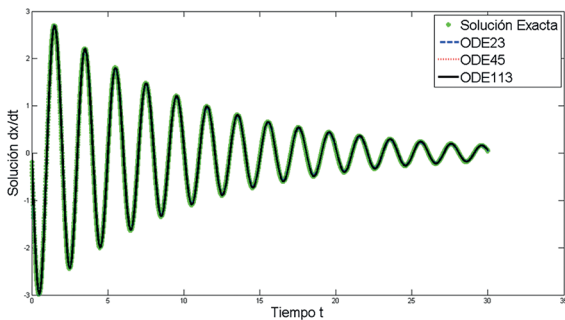
El uso de las funciones ODE en código de *Matlab* se describe a continuación.

$$[T, Y] = ODE(odefun, tspan, Y_0)$$

*odefun* es un identificador de función, que puede ser un nombre de archivo de función, un identificador de función anónimo o un nombre de función en línea.

*tspan* es el intervalo  $[x_0, x_{n+1}]$  o una serie de puntos dispersos  $[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}]$ .

$Y_0$  es el vector de valor inicial.



**Figura 4.** Soluciones numéricas para  $\frac{dx}{dt}$  en el intervalo  $[0, 30]$ , con  $h = 0.0075$ ,  $N = 400$ ,  $m = 1$ ,  $b = 0.2$  y  $k = 9.81$ .

$T$  devuelve el tiempo del vector de columna.

$Y$  devuelve el vector de la columna de solución correspondiente a  $T$ .

## Resultados y discusión

Para la implementación de los algoritmos mencionados anteriormente, se consideraron la ecuación

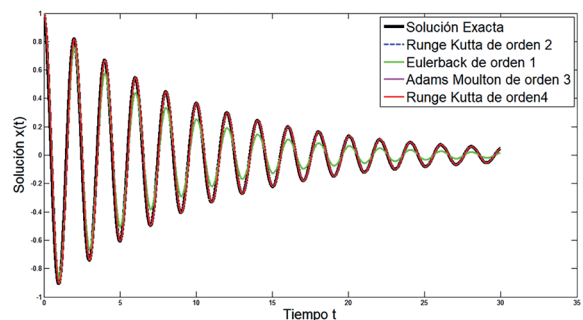
diferencial  $m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$  que describe el movimiento armónico amortiguado, donde  $\frac{dx}{dt}$  representa la velocidad del movimiento vertical de la masa, con las siguientes condiciones iniciales,  $x(0) = 1$  y  $x'(0) = 0$ .

Se presentarán a continuación, los resultados obtenidos para la solución analítica  $x(t)$  y para la velocidad del movimiento vertical de la masa  $\frac{dx}{dt}$ .

### A) Resultados de la implementación de las funciones ODE de Matlab.

En la Fig. 3 se muestra la comparación de las funciones ODE23, ODE45 y ODE113 con la solución exacta  $x(t)$ , mediante una experimentación numérica en el intervalo  $[0, 30]$ .

En la Fig. 4 se muestra la comparación de las funciones ODE23, ODE45 y ODE113 con la velocidad del movimiento vertical de la masa  $\frac{dx}{dt}$ , mediante una la experimentación numérica en el intervalo  $[0, 30]$ .



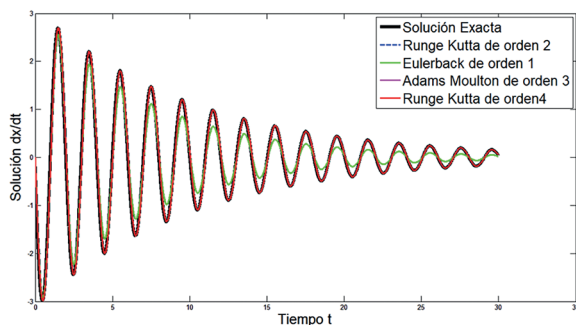
**Figura 5.** Soluciones numéricas para  $x(t)$  en el intervalo  $[0, 30]$ , con  $h = 0.0075$ ,  $N = 400$ ,  $m = 1$ ,  $b = 0.2$  y  $k = 9.81$ .



B) *Resultados de la implementación de los métodos numéricos de orden 1, de orden 2, de orden 3 y de orden 4 descritos en este trabajo.*

En la Fig. 5 se muestra la comparación de las soluciones numéricas de los métodos eulerbackward de orden 1, Runge Kutta de orden 2, Adams Moulton de orden 3 y Runge Kutta de orden 4 con la solución exacta  $x(t)$ , mediante una la experimentación numérica en el intervalo  $[0,30]$ .

En la Fig. 6 se muestra la comparación de las soluciones numéricas de los métodos *Euler backward* de orden 1, *Runge Kutta* de orden 2, *Adams Moulton* de orden 3 y *Runge Kutta* de orden 4 con la velocidad del movimiento vertical de la masa  $\frac{dx}{dt}$ , mediante una la experimentación numérica en el intervalo  $[0,30]$ .



**Figura 6.** Soluciones numéricas para  $\frac{dx}{dt}$  en el intervalo  $[0,30]$ , con  $h = 0.0075$ ,  $N = 400$ ,  $m = 1$ ,  $b = 0.2$  y  $k = 9.81$ .

### Conclusiones

En este trabajo se han realizado soluciones numéricas para pequeñas intensidades de amortiguamiento del problema que describe el movimiento armónico amortiguado representado mediante ecuaciones diferenciales, la cual presenta solución analítica real para la condición dada, posteriormente, se han implementados algunos métodos numéricos, así como las funciones ODE23, ODE45 y ODE113 de *Matlab*, para realizar una comparación con la

solución analítica exacta del modelo estudiado y con la velocidad del movimiento vertical de la masa.

A continuación, se presentan las conclusiones sobre la comparación de las distintas funciones ODE de *Matlab* con las soluciones exacta y de velocidad vertical.

- Las funciones ODE23, ODE45 y ODE113 incorporadas en *Matlab* permiten resolver de manera eficiente ecuaciones diferenciales ordinarias con problema de valor inicial, sobre la implementación de estas funciones al modelo estudiado se puede concluir que, la función ODE113 presenta más aproximación a las soluciones analíticas exacta y de velocidad vertical, debido a su número de orden.
- En general, no hay mucha diferencia entre las funciones ODE de *Matlab* y se pueden ser consideradas como las soluciones numéricas más exactas para ecuaciones diferenciales ordinarias con problema de valor inicial.

Con relación a los métodos numéricos aplicados, el método de **orden 1 Eulerback**, es el que presenta menor aproximación a las soluciones analíticas exactas y de velocidad vertical, el resultado del método numérico de **orden 2, Runge Kutta**, presenta una notable mejoría respecto al resultado del método de orden 1. Sin embargo, los métodos de **orden 3** y de **orden 4** son los que se aproximan de manera eficiente a las soluciones analíticas exactas y de velocidad vertical, siendo el método *Runge Kutta* de orden 4 la mejor.

Para la resolución numérica de este tipo de problema de valor inicial se recomienda la implementación de cualesquiera de las funciones ODE de *Matlab* y de los métodos numéricos, el método de *Runge Kutta* de orden 4 es el indicado.

### Contribución de los autores

Todos los autores contribuyeron de manera equitativa en la elaboración de este artículo.

### Conflictos de interés

Los autores declaran no tener conflictos de interés.

### Literatura citada

- Atkinson, K., Han, W. & Stewart, D. E. (2011). *Numerical solution of ordinary differential equations*. Hoboken: John Wiley & Sons. xii + 252.
- Di Prima, B. & Boyce, W. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México, D.F.: Limusa / Grupo Noriega Editores. 758 pp.
- González, H. (2009). *Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden de coeficientes constantes y algunas aplicaciones físicas*. Repositorio Institucional, Universidad de Carabobo. [Consulted: 18.vi.2022]. <<http://riuc.bc.uc.edu.ve/handle/123456789/756>>.
- León Camejo, P.D. (2015). *Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias: métodos Runge-Kutta explícitos*. Trabajo de Grado. San Cristóbal de La Laguna: Universidad de La Laguna. 43 pp.
- Molina M.C. (2016). *Métodos Matemáticos de la Física II: Ecuaciones Diferenciales y Funciones Especiales*. Texto de Curso. Granada: Universidad de Granada. 152 pp.
- Costa, V.A., Bordogna, C.M. & Torroba, P.L. (2011). *El movimiento armónico simple y las ecuaciones diferenciales de segundo orden lineal: su articulación en la enseñanza*. Exposición. I Jornada de Investigación y Transferencia de la Facultad de Ingeniería. La Plata: Universidad Nacional de La Plata. 8 pp.
- Pascual, F.E.B., Mariño, M.L. & Sada, A.E.G. (2008). *Análisis del Movimiento Oscilatorio*. Reporte Técnico. Veracruz: Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. 16 pp.
- Rodríguez Chuquimango, S.P. (2019). *Modelamiento matemático de la acción de los terremotos sobre edificios de varios pisos usando sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden*. Informe Final de Proyecto de Investigación. Callao: Universidad Nacional del Callao. 79 pp.
- Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D. & Freedman, R. A. (2013). *Física Universitaria: Volumen 1*. (13ª Ed.). Naucalpan de Juárez: Pearson Educación de México. xxvii + 686 + 25 pp.
- Serrano, M.D.C.C., Oliver, E.B.V., Resendiz, S.M. & Galván, W.G.A. (2016). Sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado, casos: sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado, su modelado y solución, con el apoyo de GeoGebra. *Pistas Educativas*, 38(121): 61-80.