

ESTABILIZACIÓN DEL MÉTODO DE FORWARD EULER USANDO FUNCIONES DE LYAPUNOV

STABILIZATION OF THE FORWARD EULER USING LYAPUNOV FUNCTIONS

GUSTAVO A. GONZÁLEZ ARMOA¹ & CHRISTIAN E. SCHARERER²

¹Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Asunción. E-mail: omicron.aa@gmail.com.
²Laboratorio de Computación Científica y Aplicada, Facultad Politécnica, U.N.A., PO Box 2111 SL, San Lorenzo, Paraguay. E-mail: eschaer@pol.una.py.

Resumen: En este trabajo, proponemos una estabilización para el método de forward Euler-Galerkin usando la teoría de control. Específicamente, planteamos el método como una ecuación de estados y usamos la teoría de funciones de Lyapunov para diseñar una ley de control. Los resultados numéricos demuestran que, con la utilización de funciones de Lyapunov, es posible hallar un controlador que establezca el método de elementos finitos, mismo cuando el parámetro de difusión es relativamente pequeño y $\tau \approx h$. Los resultados estimulan la investigación en esta dirección.

Palabras claves: método de elementos finitos, ecuación de difusión, funciones de Lyapunov, ley control.

Summary: In this work, we propose a stabilization for method using forward Euler-Galerkin control theory. Specifically, propose the method as a state equation and use the Lyapunov function theory to design a control law. Numerical results show that, with the use of functions Lyapunov, it is possible to find a controller that stabilizes the finite element method, even when the diffusion parameter is relatively small and $\tau \approx h$. The results stimulate research in this direction.

Key words: Stabilization for the finite element method, convection-diffusion equation, Lyapunov functions, control law.

INTRODUCCIÓN

En este artículo discutimos el uso de la teoría de control para estabilizar la solución numérica encontrada al usar métodos explícitos para discretizar la ecuación de difusión pura unidimensional en un dominio $\Omega \in \mathbb{R}$. La variable de estado $w(x, t)$ satisface la ecuación de difusión:

$$\begin{cases} \partial_t w - \varepsilon \partial_{xx} w = f & \text{en } \Omega \text{ para } t_0 < t \\ w(x, 0) = w_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

sujeta a condiciones de frontera de Dirichlet $w(0, t) = w(L, t) = 0$. El parámetro $\varepsilon \in \mathbb{R}$ es el coeficiente de difusión y $f(x, t)$ el término forzante que en el contexto de este trabajo es usado para controlar la ecuación (1). Formalmente, para cada tiempo t la función $w \in H_0^1(\Omega)$ y el término forzante f pertenece al espacio $\mathbf{U} = L^2(t_0, t_f; U)$ donde $U = L^2(\Omega)$.

Dentro del contexto de los métodos numéricos uno de los más usados para resolver ecuaciones

diferenciales es el método de Galerkin, también, conocido como método de elementos finitos (Thomée, 1997; Hughes, 1987; Becker *et al.*, 1981). Es sabido que si ciertas condiciones en los parámetros de la discretización no son cumplidas estrictamente, el método es inestable cuando se aplica a la resolución de la ecuación de difusión y a la de convección-difusión. Una posible solución encontrada en la literatura para contornar esta inestabilidad consiste en estabilizar el método de elementos finitos introduciendo un término que regularice el problema. Entre los métodos estabilizados podemos citar el método de Galerkin Least Square (GLS), streamline upwind Petrov-Galerkin (SUPG), multiscale, entre otros (Franca *et al.*, 2006; King, 2004; Franca *et al.*, 2004; Franca & Harari, 2005; Bochev *et al.*, 2004).

En este trabajo consideramos la ecuación de difusión discretizada en la variable espacial usando el método de Galerkin estándar y en la variable temporal usando la discretización de Forward Euler.

En este caso la discretización del método Forward Euler-Galerkin es inestable numéricamente si la condición $\tau \prec h^2$ no es satisfecha (donde τ y h son los parámetros de discretización temporal y espacial, respectivamente). Esta condición es muy restrictiva. En la literatura, la forma de contornar este problema consiste en 1) regularizar la discretización espacial de Galerkin y 2) usar otro método para discretizar la variable temporal, usando por ejemplo el método de Crack-Nicolson o el método de backward Euler, entre otros (Strickwerda, 1989). Sin embargo estos métodos normalmente requieren la resolución de un sistema lineal auxiliar de gran porte para cada paso de tiempo. Esto significa que dependiendo del grado de precisión temporal requerida de la solución, es necesario realizar muchas resoluciones del sistema de gran porte auxiliar. En este punto radica el interés de estabilizar el método de forward Euler-Galerkin ya que siendo explícito no necesita la resolución de un sistema lineal de gran porte, lo que implica en un costo bajo para la resolución de cada paso de tiempo.

De forma a considerar la discretización de la ecuación de difusión como un sistema de control. Consideramos las incógnitas de la discretización de Euler explícito-Galerkin como las variables de estado y el término forzante como la variable de control. Escogemos la variable de control como una combinación lineal de las variables de estado. En forma matricial, el controlador es una matriz que necesita ser determinada. Esta matriz es conocida con el nombre de matriz de realimentación (Ogata, 1997; Baumeister & Leitão, 2008; González & C. Schaerer, 2009).

El problema considerado en este trabajo es la ecuación de difusión (ecuación de Calor) unidimensional. En la Sección 2, presentamos la formulación variacional de la ecuación de difusión, la aproximación de Galerkin, discretización para el problema; la estabilización del método utilizando funciones de Lyapunov es presentada en la Sección 3. Los resultados numéricos se encuentran en la Sección 4, seguidamente la conclusión en la Sección 5. La principal desventaja del método estabilizado usando la teoría a ser presentada en este trabajo, consiste en

que potencialmente si no se toman recaudos en la elección de las matrices involucradas en el diseño de la ley de control, el costo computacional puede ser elevado, sin embargo, los resultados obtenidos son muy alentadores en el sentido de utilizar la teoría de control de forma a estabilizar el método explícito, en consonancia con la línea de investigación de utilización de la teoría de control en el diseño y optimización algoritmos numéricos.

LA DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA

De forma a obtener la formulación débil de la ecuación (1) se multiplica a ambos lados de la misma por la función de prueba $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, integrando por partes sobre Ω y usando las condiciones de frontera $w(0, t) = w(L, t) = 0$, y usando la fórmula de Green se obtiene la forma variacional:

$$(\partial_t w, \varphi) + a(w, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1 \quad (2)$$

con $w(x, 0) = w_0 \in H_0^1(\Omega)$ y donde los funcionales $a(\cdot, \cdot)$ sobre $H_0^1 \times H_0^1$ y (f, φ) están definidos por $a(w, \varphi) := \varepsilon(\nabla w, \nabla \varphi)$ y $(f, \varphi) := \int_{\Omega} f \varphi dx$. La forma bilineal $a(w, \varphi)$ para la ecuación (2) tiene las siguientes propiedades (Thomé, 1997; Chen, 2005):

Simétrica: $a(w, v) = a(v, w)$.

Continua: $\exists C > 0$ tal que $|a(w, \varphi)| \leq C \|w\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1}$, $\forall w, \varphi \in H_0^1$.

Coersiva: $a(\varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_{H_0^1}^2$, $\forall \varphi \in H_0^1$.

Dadas las propiedades mencionadas arriba para la forma bilineal, $a(w, \varphi)$, el Lema de Lax-Milgram asegura que el problema dado (2) tiene una única solución $w \in H_0^1$ (Brézis, 1983).

De forma a discretizar la ecuación (1) en la variable espacial, aplicamos el método de elementos finitos a su forma débil (2) para cada $t \in (t_0, t_f)$ fijo.

Elegimos una triangulación uniforme $T(\Omega)$ de Ω y empleamos el espacio conforme P_1 de elementos finitos $Y_h \subset H_0^1$ para aproximar $w(\cdot, t)$. Análogamente empleamos el espacio P_0 de elemen-

tos finitos $\Pi \subset \Gamma J$ para aproximar $f(., t)$. Sean $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ y $\{\psi_j\}_{j=1}^p$ las bases de funciones para el espacio de elementos finitos para Y_h y U_h , respectivamente. La expresión (2) toma la forma

$$(\partial_t w_h, v_h) + a(w_h, v_h) = (f, v_h) \forall v_h \in Y_h, \quad (3)$$

donde $w_h(x, t) = \sum_{j=1}^m z_j \varphi_j$. Asumimos que el término forzante y las condiciones iniciales tienen la forma $f_h(x, t) = \sum_{i=1}^p \psi_i u_i$ y $z_h(x, 0) = \sum_{j=1}^m z_j(0) \varphi_j$; que corresponden a proyecciones $L^2(\Omega)$ de f y w_0 en U_h y Y_h , respectivamente.

Considerando w_h y f_h en la ecuación (3) obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\sum_{j=1}^m (\varphi_i, \varphi_j) \frac{dz_j}{dt} + \sum_{j=1}^m a(\varphi_i, \varphi_j) z_j = \sum_{j=1}^p (\varphi_i, \psi_j) u_j, \quad i = 1, \dots, m; \quad (4)$$

donde las incógnitas son los $z_j(t)$. Teniendo en cuenta la ecuación (4), definimos las matrices M , A y B respectivamente como

$$M = \left[\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx \right]_{i,j=1}^m, \quad A = - \left[\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx \right]_{i,j=1}^m \text{ y}$$

$$B = \left[\int_{\Omega} \varphi_i \psi_j dx \right]_{i=1:m, j=1:p}.$$

Denotando el vector de incógnitas por $z(t) = (z_1(t), \dots, z_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$, el vector forzante $u(t) = (u_1(t), \dots, u_p(t))^T \in \mathbb{R}^p$ y re-escribiendo la ecuación (4) en forma matricial, obtenemos:

$$\begin{cases} M \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (5)$$

donde las matrices $M, A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$. Es importante resaltar que en el contexto de este trabajo usamos el término forzante para modificar la solución de la ecuación (5).

Observación 1. Es importante resaltar que en el contexto de este trabajo asumimos que los φ_j son funciones lineales continuas a trozos, sobre el intervalo Ω de la forma

$$\varphi_j = \begin{cases} \frac{1}{h_{j-1}}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1} - x_j], \\ \frac{1}{h_j}(x_{j+1} - x), & x \in [x_j - x_{j+1}], \\ 0 & x \notin [x_{j-1} - x_{j+1}], \end{cases} \quad (6)$$

Para resolver numéricamente la ecuación (5) discretizamos la variable temporal dividiendo el intervalo $[t_0, t_f]$ como: $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_f$, con nodos equidistantes $t_r = r\tau$ y con paso del tiempo $\tau = (t_f - t_0)/n$. Usando z^r y u^r para denotar z y $u(t_r)$, respectivamente; obtenemos la discretización de Euler explícito-Galerkin

$$M \frac{z^{r+1} - z^r}{\tau} = Az^r + Bu^r, \quad (7)$$

o equivalentemente,

$$Mz^{r+1} = (M + \tau A)z^r + \tau Bu^r, \quad (8)$$

La condición de estabilidad para este método se establece en el siguiente Lema (Thomé, 1997):

Lema 1: Sean las matrices A y M simétricas definidas positivas. Sean λ_j los autovalores generalizados de la matriz A con respecto a M . Entonces el esquema de Euler explícito-Galerkin es estable si:

$$\tau \leq \min \{c_1 / \varepsilon, c_2 h^2 / \varepsilon\}.$$

Las limitaciones al paso de tiempo τ establecidas por el Lema 1, hace que se hayan encontrado otros métodos para la resolución temporal de (5). Entre estos métodos puede citarse el método de Euler implícito y el de Crank-Nicolson. Estos métodos son incondicionalmente estables, es decir, el tamaño de τ está estricto apenas por la necesidad de presidios (ver Neittaanmäki & Tiba, 1994) y consecuentemente podemos tomar por ejemplo simplemente $\tau = h$. La desventaja de los métodos implícitos frente a los explícitos, radica en la necesidad que tienen estos métodos en resolver sistemas algebraicos de gran porte, este hecho los torna costosos computacionalmente. Por su parte, si es posible levantar la restricción impuesta por

el Lema 1, entonces los métodos explícitos serían competitivos desde el punto de vista computacional. Esto último debido al bajo orden de complejidad (apenas una multiplicación de matriz por vector) por paso de tiempo.

En la siguiente sección describiremos la propuesta del artículo consistente en usar técnicas de la teoría de control para estabilizar la ecuación de difusión cuando el método de Euler explícito con $\tau > h^2 / \varepsilon$ es considerado.

ESTABILIZACIÓN USANDO LYAPUNOV

Considerando $u^r = \mathbf{0}$ para todo r , la ecuación (8) puede ser re-escrita como:

$$\begin{aligned} z^{r+1} &= Ez^r \\ z^{(0)} &= z^0, \end{aligned} \quad (9)$$

donde $E := M^{-1}(M + \tau A) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, y $z \in \mathbb{R}^m$ es la solución. Para el sistema (9), el estado z^* es denominado de equilibrio si $z^* = Ez^*$.

El sistema (9) es llamado localmente convergente si existe un $\delta > 0$ tal que si $\|z^0 - z^*\| < \delta$, la solución z^r existe; además es globalmente convergente si $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = z^*$ para todo z^0 . Diremos que es asintóticamente estable si es localmente convergente, y globalmente asintóticamente estable si es globalmente convergente. Tomamos por simplicidad que $z^* = \mathbf{0}$ y estamos interesados en que la solución $z^r = \mathbf{0}$ sea globalmente asintóticamente estable. En este contexto, siendo $V(z) := \langle z^r, Pz^r \rangle$ una función candidata a función de Lyapunov siendo P una matriz simétrica y positiva definida. La condiciones para que z^* sea asintóticamente estable se establece en el siguiente Teorema (Gajić & Qureshi, 1995; Bhaya & Kaszkurewicz, 2006):

Teorema 1 (Gajić & Qureshi, 1995): *El punto de equilibrio $z^* = \mathbf{0}$ del sistema lineal invariante en el tiempo (9) es globalmente asintóticamente estable si y solamente si para toda matriz simétrica definida positiva $Q = Q^T > 0$, existe una única matriz $P = P^T > 0$ tal que $\Delta V(z^r) = -\langle z^r, Qz^r \rangle$*

Cuando $V(z) := \langle z^r, Pz^r \rangle$, la expresión $\Delta V(z^k) = V(z^{r+1}) - V(z^r) = -\langle z^r, Qz^r \rangle$ toma la forma:

$$E^T P E - P = -Q. \quad (10)$$

La ecuación (10) es conocida como *ecuación de Stein* o *ecuación de Lyapunov* de tiempo discreto. el punto de equilibrio z^* del sistema (9) en malla abierta no es asintóticamente estable, lo que significa que la condición sobre τ establecida por el Lema 1 no es satisfecha, entonces consideramos el sistema:

$$\begin{cases} z^{r+1} = Ez^r + Du^r, & \text{con } r \in \mathbb{N} \\ z^0 = z^0. \end{cases} \quad (11)$$

Entonces, el problema de control para la ecuación (11) en el contexto de este trabajo, consiste en encontrar una sucesión u^r de forma que el punto de equilibrio z^* sea asintóticamente estable mismo cuando $\tau > h^2 / \varepsilon$.

Asumimos que u^r depende linealmente del estado z^r , estableciendo la ley de control:

$$u^r = Fz^r, \quad (12)$$

donde F es una matriz $m \times n$. Con esta ley de control, el sistema realimentado con respecto al sistema (9) toma la forma:

$$z^{r+1} = (E - DF)z^r. \quad (13)$$

Para analizar el sistema (9) usando el Teorema 1, definimos una función candidata a función de Lyapunov $V(z^r)$ dada por:

$$V(z^r) := \langle z^r, Pz^r \rangle,$$

donde su variación, denotada por $\Delta V(z^r)$ se iguala a, $-\langle z^r, Qz^r \rangle - \langle u^r, Ru^r \rangle$, es decir:

$$\Delta V(z^r) = -\langle z^r, Qz^r \rangle - \langle u^r, Ru^r \rangle, \quad (14)$$

donde las matrices Q y R son dadas simétricas definidas positivas. En particular en el contexto de este trabajo se considera que $Q = qI$ y $R = rI$ con

$q, r \in \mathbb{R}$ e I es la matriz identidad de orden m . La matriz F a ser usada en la ley de control (12) es especificada en el siguiente teorema (Baumeister & Leitão, 2008):

Teorema 2: La ley de control para el sistema lineal discreto (11) para una matriz positiva definida R , se define como

$$u^k = -(B^T PB + R)^{-1} B^T PAz^k, \quad (15)$$

donde la matriz P satisface la ecuación

$$P = E^T PE - E^T PD(D^T PD + R)^{-1} D^T PE + Q. \quad (16)$$

Demostración: Teniendo en cuenta la variación de V para el sistema (11) tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta V(z^k) &= V(z^{k+1}) - V(z^k) \\ &= (z^{k+1})^T Pz^{k+1} - (z^k)^T Pz^k \\ &= (Ez^k + Du^k)^T P(Ez^k + Du^k) - (z^k)^T Pz^k \\ &= ((z^k)^T E^T + (u^k)^T D^T) P(Ez^k + Du^k) - (z^k)^T Pz^k \\ &= ((z^k)^T E^T PEz^k + (z^k)^T E^T PDu^k + (u^k)^T D^T PEz^k \\ &\quad + (u^k)^T D^T PDu^k) - (z^k)^T Pz^k. \end{aligned} \quad (17)$$

Reemplazando la ley de control (12) a la derecha de la ecuación (17) tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta V(z^k) &= (z^k)^T E^T PEz^k + (z^k)^T E^T PD(-Fz^k) + (-Fz^k)^T D^T PEz^k \\ &\quad + (-Fz^k)^T D^T PD(-Fz^k) - (z^k)^T Pz^k \\ &= (z^k)^T (E^T PE - E^T PDF + -F^T D^T PE + F^T D^T PDF - P)z^k. \end{aligned} \quad (18)$$

Teniendo en cuenta la ley de control (14) y la variación ΔV obtenemos

$$\begin{aligned} -(z^k)^T Q(z^k) - (z^k)^T F^T RF(z^k) &= (z^k)^T (E^T PE - E^T PDF \\ &\quad - F^T D^T PE + F^T D^T PDF - P)(z^k) \\ -(z^k)^T (Q - F^T RF)(z^k) &= (z^k)^T (E^T PE - E^T PDF \\ &\quad - F^T D^T PE + F^T D^T PDF - P)(z^k). \end{aligned} \quad (19)$$

Comprobando ambos miembros de la ecuación (19) y notando que la misma debe ser válida para cualquier z^k , llegamos a

$$-Q - F^T RF = E^T PE - E^T PDF - F^T D^T PE + F^T D^T PDF - P, \quad (20)$$

o equivalentemente

$$E^T PE - E^T PDF - F^T D^T PE + F^T D^T PDF - P + Q + F^T RF = 0. \quad (21)$$

Tomando $F = (D^T PD + R)^{-1} D^T PE$ y considerando la expresión (21) obtenemos la expresión que debe satisfacer la matriz P .

$$P = E^T PE - E^T PD(D^T PD + R)^{-1} D^T PE + Q = 0. \quad (22)$$

Observación 2: Es importante resaltar que en el origen z^* es estable para el sistema controlado (13), si y solamente si $\rho(A - BF) \leq 1$ y todos los autovalores de módulo unitario son semi-simples, es decir, corresponden a bloques de Jordan de dimensión 1.

RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección presentamos los resultados obtenidos para la ecuación de difusión unidimensional:

$$\partial_t w(x, t) = \varepsilon \partial_{xx} w(x, t) + f(x, t), \quad (23)$$

$x \in \Omega$ con $\Omega = [0, 1]$, con parámetro de difusión $\varepsilon = 10^{-1}$. Se desea mostrar el efecto de la estabilización usando las funciones de Lyapunov y relajar la condición para τ establecida en el Lemma 1.

En la Tabla 1 es presentado el radio espectral de la matriz E para el sistema (9). Fue considerado $\varepsilon = 10^{-1}$, $\tau = h$. Además se presenta como referencia los resultados para $\tau = h^2 / 12 \varepsilon$ (condición de estabilidad para el método de forward Euler). Siguiendo (King, 2003; King, 2004), tomamos los valores de los parámetros $q = 10$ y $r = 10^{-1}$ de la función de Lyapunov. La malla es refinada de acuerdo a la ley: $h = h^i = 1 / 2^i$ para $i = 3, 4, 5$ y 6 , respectivamente. Se observa que el método forward Euler es estable si $\tau = h^2 / 12 \varepsilon$, mientras que con $\tau = h$ el método es inestable. El efecto de la inestabilidad en la simulación puede ser observado comparando las Figuras 1 y 2.

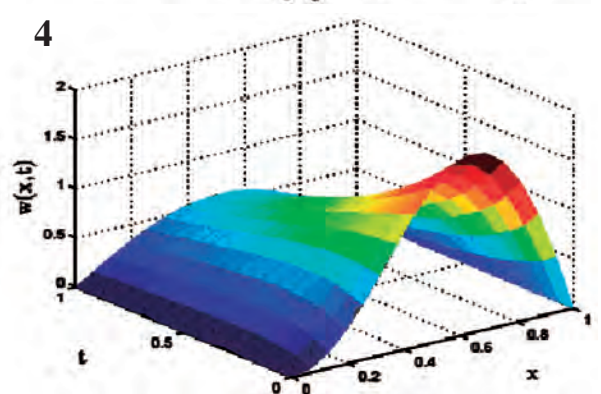
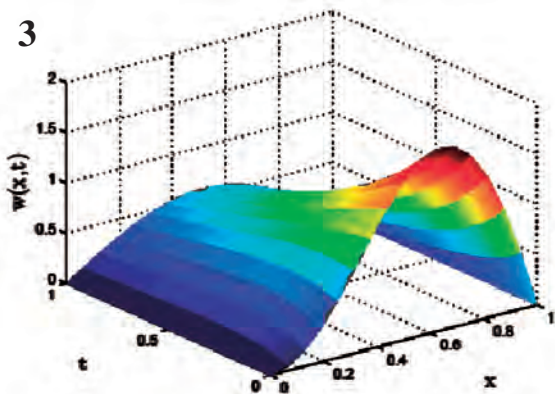
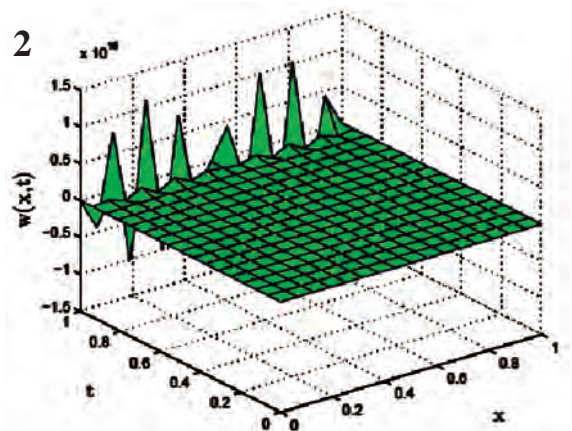
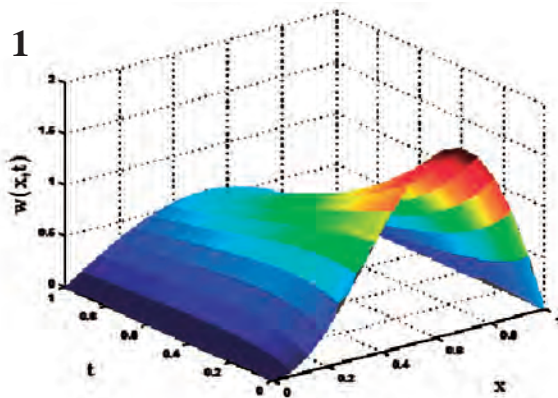
En la Tabla 2 es presentado el radio espectral de las matrices E y $E - DF$. Puede observarse en la tercera columna de la Tabla 2 que en este caso el método Euler explícito-Galerkin es estable utilizando la teoría de control vía funciones de Lyapunov cuando tomamos el parámetro $\tau = h$, los resultados de los experimentos podemos ver en las Figuras 3 y 4. Observe la similitud de las figuras.

A partir de los resultados podemos inferir que el método de Euler explícito-Galerkin controlado es estable teniendo en cuenta el parámetro $\tau = h$. En este trabajo hemos considerado los valores de q y r parámetros de la función de Lyapunov, asumiendo

Tablas 1 y 2. Estabilización para $\tau > h^2 / 12\varepsilon$. 1) Método no controlado. 2) Método no estabilizado y estabilizado.

Tabla 1		
	$\bar{q}=10, r=10^{-3}$ y $\varepsilon=10^{-1}$	
$h=1/2^i$	$\tau=h^2/12\varepsilon$	$\tau=h$
	no estabilizado $\rho(E)$	no estabilizado $\rho(E)$
$i=3$	0.8939	8.584
$i=4$	0.9717	18.6570
$i=5$	0.9928	38.1240
$i=6$	0.9982	76.6614

Tabla 2			
	$\bar{q}=10, r=10^{-3}$ y $\varepsilon=10^{-1}$		
$h=1/2^i$	$\tau=h^2/12\varepsilon$	$\tau=h$	$\tau=h$
	no estabilizado $\rho(E)$	no estabilizado $\rho(E)$	estabilizado $\rho(E-DF)$
$i=3$	0.8939	8.584	0.8940
$i=4$	0.9717	18.6570	0.9406
$i=5$	0.9928	38.1240	0.9694
$i=6$	0.9982	76.6614	0.9846



Figuras 1-4. Método de Euler explícito-Galerkin. 1) tamaño de la matriz 307×307 , $\tau = 0.0032552$ y $\varepsilon = 10^{-1}$. 2) tamaño de la matriz 16×16 , $\tau = 0.0032552$ y $\varepsilon = 10^{-1}$. 3) tamaño de la matriz 307×307 , $\tau = 0.0032552$ y $\varepsilon = 10^{-1}$. 4) tamaño de la matriz 16×16 , $\tau = 0.0032552$ y $\varepsilon = 10^{-1}$.

la relación $q \gg r$.

CONCLUSIÓN

En este trabajo investigamos la aplicación de estabilización usando la teoría de funciones de Lyapunov para el método de *Euler explícito-Galerkin* definida para el problema de control de la ecuación de difusión. Y concluimos lo siguiente: El uso de funciones de Lyapunov permite estabilizar el método de Euler explícito para el problema de difusión. La estabilización para el método controlado es independiente del parámetro difusivo, dentro de un rango experimentado, produciendo buenas aproximaciones, para el método *Euler explícito-Galerkin*. Por último, experimentos numéricos para la ecuación de convección difusión, están en fase de implementación, así como un análisis del método propuesto.

REFERENCIAS

- BAUMEISTER, J & LEITÃO, A. 2008. Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.
- BECKER, E; CAREY, G. & TINSLEY, J. 1981 Finite element methods an introduction, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- BHAYA, A. & KASZKUREWICZ, E. 2006. Control perspectives on numerical algorithms and matrix problems. SIAM: advances in design and control, Philadelphia.
- BOCHEV, P.B.; GUNZBURGUER, M. & SHADID, J. 2004. Stability of the SUPG finite element method for transient advection diffusion problems. Computer methods in applied mechanics and engineering, 193:2301-2323.
- BONET, R. 2006. Numérical stabilization of convection-diffusion-reaction problems. Delft Institute of Applied Mathematics Faculty of Electric Engineering, Mathematics and Computer Science Mekelweg 4 2628 CD Delft, Netherlands.
- BRÉZIS, H. 1983. Analyze fonctionelle, Masson Paris.
- CHEN, Z. 2005. Finite element methods and their applications. Scientific computation. Springer, Berlin.
- FRANCA, L. & HARARI, I. 2005. Streamline design of stability parameter for advection-diffusion problems. CNPq, Brasil.
- FRANCA, L.P.; HAUKE, G. & MASUD, A. 2006. Revisiting stabilized finite element methods for the advective diffusive equation. Computer methods in applied mechanics and engineering. 195: 1560-1572.
- FRANCA, L.; MADUREIRA, A. & VALENTIN, F. A. 2004. Multiscale finite element methods. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCMAS.
- GAJIĆ, Z. & QURESHI, M. T. J. 1995. Lyapunov matrix equation in system stability and control, In: MATHematics in Science and Engineering, Vol: 195. Academic Pres, Inc. San Diego.
- GONZÁLEZ, G. & SCHAEERER, C. 2009. Estabilização do método de elementos finitos para a equação de convecção-difusão via funções de Lyapunov", 32º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, CNMAC, Cuiaba-Brasil.
- HUGHES, T. 1987. The finite element methods linear static and dynamic finite element analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- KING, B. 2003. Burgers' equation: Galerkin Least Squares Approximation and Feedback Control. Mathematical and Computer Modeling, 38:1075-1085.
- KING, B. 2004. The 1-D Convection Diffusion Equation: Galerkin Least Squares Approximation and Feedback Control. 43rd IEEE Conference on Decision and Control. December.
- KRUEGER, D.A. 2004. Stabilized finite element methods for feedback control of convection-diffusion equations. Doctor in Philosophy in Mathematics Thesis, Blacksburgo Virginia. July.

- LYAPUNOV, A. M. 1892. El problema general de la estabilidad del movimiento. PhD Tesis, Kharkov Mathematical Society.
- LYAPUNOV, A.M. 1992. The general problem of the stability of motion, 1892. International journal of control: Lyapunov centenary. 1992.
- NEITTAANMÄKI, P. & TIBA, D. 1994. Optimal control of nonlinear parabolic systems: Theory, algorithms and applications. In: Series of monographs and textbooks in pure and applied mathematics. Marcel Dekker, Inc., New York, USA.
- OGATA, K. 1997. Modern Control Engineering, third edition, Prentice Hall, New Jersey.
- STREJC, V. 1981. State space theory of discrete linear control. John Wiley & Sons, New York.
- STRICKWERDA, J. C. 1989. Finite difference schemes and partial differential equations. Mathematics Series, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California, USA.
- THOMÉE, V. 1997. Galerkin finite element methods for parabolic problems. In: Springer Series in Computational Mathematics. Springer, Berlin.