Reportes Científicos
de la FACEN

Vol. 5, Nº 2 (2014): 39-46

Artículo Original

REPRESENTACIONES DE GRUPOS SIMÉTRICOS

REPRESENTATIONS OF SYMMETRIC GROUPS

Haida Carrera Otazo[1]

[1]Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. E-mail: haidacarrera@gmail.com

Resumen: En este trabajo se presentan las nociones básicas de la teoría de Representaciones de Grupos Finitos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado cuya característica no divide al orden del grupo. También se realiza el estudio de la teoría de caracteres y las relaciones de ortogonalidad, que cumplen un papel muy importante para el estudio que se realizará posteriormente. Se realiza el estudio de las representaciones del grupo simétrico, se comienza con el estudio del conjunto de particiones de un número natural *n*, pues las mismas parametrizan las representaciones irreducibles. Para describir estas últimas, se introducen las nociones de diagramas de Young, tablero, tabloides y politabloides. Éstas permiten definir los módulos de Specht que caracterizan las representaciones irreducibles salvo isomorfismo. La base estándar del módulo de Specht y la obtención del isomorfismo entre representaciones del tipo $S^{\lambda} \otimes S^{(1^n)}$ y S^{λ}, siendo λ una partición de n, ayudará para el cálculo de los caracteres de los módulos de Specht, los cuales son importantes para la construcción de la tabla de caracteres de los grupos simétricos.

Palabras clave: *Grupos Finitos, Representaciones, Caracteres, Grupos Simétricos, Tableros, Tabloides. Módulos de Specht.*

Abstract: In these notes is presented the basic notions of the Representation Theory of Finite groups an algebraically closed field of characteristic zero. It also introduce the corresponding character theory with emphasis in the relations of ortogonality, which will be used along this article. We study the representations of the symmetric group, which starts with the study of the set of partitions of a natural number n, since they parameterize the irreducible representations. To describe the latter, we introduce Young diagrams, tabloids and politabloides. These allow one to define Specht modules which characterize the irreducible representations isomorphism. The standard bases of the Specht modules and the isomorphism between the representations $S^{\lambda} \otimes S^{(1^n)}$ y S^{λ}, with λ a partition of n, will be crucial for the computation of the characters associated to the Specht modules, and consequently, for the character table of the symmetric group.

Key Words: *Finite Groups, Representations, Characters, Symmetric Groups, Boards, Tabloids. Specht Modules.*

INTRODUCCIÓN

El estudio de la teoría de grupos tuvo sus inicios en los trabajos de E. Galois en el año 1829. El estudio de las representaciones de grupos ha adquirido un interés especial, por sus diversas aplicaciones, por ejemplo, para el estudio de la clasificación de álgebras de Hopf de dimensión finita de un grupo dado, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Con esta investigación se trata de dar las herramientas para determinar explícitamente todas las representaciones de dimensión finita de un grupo finito G. La importancia de esta teoría no radica sólo en sus aplicaciones en otros campos, sino también en comprender la estructura interna del grupo.

Existen dos casos para este estudio, una de ellas es cuando la característica del cuerpo es cero o no divide al orden del grupo, y la otra es cuando la característica del cuerpo divide al orden del grupo G. En este trabajo se realiza el estudio del primer caso mencionado.

La descripción explícita de todas las representaciones irreducibles de un grupo fijo G, requiere de estudios mucho más complicados. En el presente trabajo se realizará la descripción de representaciones del ejemplo del grupo simétrico $\mathbb{S}_n$, sobre el cuerpo de los números complejos.

METODOLOGÍA

Para la realización de este trabajo se procede a la

Recibido: 20/05/2014

Aceptado: 15/12/2014

investigación bibliográfica para así comprender los resultados básicos de la teoría de representaciones de grupos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, luego se estudian las representaciones de una familia de grupos en particular, los grupos simétricos y posteriormente se describen explícitamente dichas representaciones, haciendo énfasis en el grupo simétrico $\mathbb{S}_4$.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para la realización de este estudio se fijan algunas notaciones, K representa siempre un cuerpo, G un grupo finito y los V espacios vectoriales considerados son de dimensión finita.

Según Serre (1970), si se tiene un grupo G y un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, una representación lineal del grupo G en el espacio vectorial V es un homomorfismo de grupos ρ que va del grupo G al grupo $GL(V)$ de isomorfismos de V. Es decir, si tomamos dos elementos cualesquiera x e y del grupo, se cumple que:

$$\rho(xy) = \rho(x)\rho(y).$$

Así se puede decir que (ρ, V) es una representación lineal de G en V. El grupo posee el elemento neutro e, y se puede ver que $\rho(e) = I$, siendo I la identidad y además se cumple la igualdad:

$$\rho(x^{-1}) = (\rho(x))^{-1}.$$

El grado de la representación (ρ, V) es igual a la dimensión del espacio vectorial V.

Ejemplo 1.

Si G es un grupo de orden n, V un espacio vectorial sobre un cuerpo K con dimensión n, $(e_t)_{t\in G}$ es una base de V indexada por los elementos de G. La representación $\rho(s)$ se define como el endomorfismo de V que transforma e_t en e_{ts}, pues se puede probar que se cumple $\rho(g)\rho(h)e_t = \rho(gh)e_t$. A esta representación se le llama representación regular de G.

A continuación se verá en qué consiste una subrepresentación.

Si se tiene un subconjunto W subespacio vectorial del espacio vectorial V, y la restricción $\rho|_W(x)$ resulta un automorfismo de W, para todo $x \in G$, entonces $\rho|_W(x) : G \to GL(W)$ es una representación lineal de G en W, y en este caso se dice que la representación $(\rho|_W, W)$ es una subrepresentación de (ρ, V).

Para el estudio de las subrepresentaciones irreducibles será de mucha utilidad el teorema que enunciaremos ahora.

Teorema 2. (Teorema de Maschke)

Sea G un grupo finito, K un cuerpo cuya característica no divide al orden del grupo y V un K espacio vectorial. Sean $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal de G en V y W un subespacio vectorial de V estable por la acción de G. Existe entonces un complemento W^0 de W en V que es estable por la acción de G (Teorema 1.1, García 2001)

Mediante el Teorema de Maschke se puede ver que si se tiene un subespacio W de V, y si W^0 es el complemento de W en V, con W y W^0 estables por la acción de G, entonces como $V = W \oplus W^0$, basta con obtener las representaciones $(\rho|_W, W)$ y $(\rho|_{W^0}, W^0)$ para conocer la representación (ρ, V).

Definición 3.

Una representación lineal (ρ, V) de un grupo G se dice irreducible si $V \neq 0$ y V no contiene subespacios estables por la acción de G, excepto los subespacios triviales 0 y V. Es decir G no contiene G-submódulos no triviales (Cagliero, 2006).
Como en este trabajo, se pretende encontrar todas representaciones irreducibles de un grupo dado, por lo que a continuación se definirá la representación irreducible.

Se sabe que, si el grupo que se está considerando es de orden finito y K es un cuerpo cuya característica no divide al orden del grupo, entonces toda representación de G se puede expresar como suma directa de representaciones irreducibles (James, 1978).

Teoría de caracteres

La teoría de caracteres de una representación es muy importante para el estudio de grupos finitos, en este trabajo se realizará la construcción de la tabla de caracteres a partir de todas las representaciones irreducibles de un grupo finito dado.

Según Cagliero (2006), si (ρ, V) es una representación de G en un K-espacio vectorial V, se llama carácter asociado a ρ a la función $\chi_\rho : G \to K$ dada por:

$$\chi_\rho(\sigma) = T(\rho(\sigma)),$$

siendo T la traza de la transformación lineal y σ un elemento de G.

Para el cálculo de la traza de una transformación lineal se debe obtener la matriz de transformación con respecto a una base fija de V, y luego calcular la suma de la diagonal principal de la matriz obtenida. El carácter de una representación resulta un morfismo de grupos, pues se puede verificar que se cumple la siguiente igualdad:

$$\chi(gh) = \chi(g)\chi(h), \forall g, h \in G.$$

Más adelante se estudiarán las relaciones de ortogonalidad de caracteres, para el efecto se define una aplicación y ésta cumple con todas las condiciones para ser un producto interno.

A continuación se trabajará sobre el cuerpo de los números complejos. Sean φ y ϕ dos funciones que van del grupo G al cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$, y se define la aplicación $(-,-)$ de la siguiente manera:

$$(-,-) : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \to G,$$

$$(\phi, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{t \in G} \varphi(t)\overline{\phi(t)}.$$

Se puede comprobar que $(a\phi + b\psi, \varphi) = (a\phi, \varphi) + (b\psi, \varphi)$, $(\varphi, \phi) = (\phi, \varphi)$ y además $(\phi, \varphi) > 0$ si $\varphi \neq 0$ y $(\phi, \varphi) = 0$ si y solo si $\varphi = 0$, con esto se puede afirmar que $(-,-)$ es un producto interno.

Utilizando este producto interno, además sabiendo que se cumple que $\chi(t^{-1}) = \overline{\chi(t)}$ y tomando ρ en su forma matricial se puede comprobar que si χ_V es el carácter de una representación irreducible, entonces $(\chi_V, \chi_V) = 1$, y además, si se tiene que χ_V y χ_V^* son caracteres de dos representaciones irreducibles no isomorfas, entonces $(\chi_V, \chi_V^*) = 0$, es decir χ_V y χ_V^* son ortogonales con respecto al producto interno definido.

Definición 4.

Sean (ρ_1, V_1) y (ρ_2, V_2) dos representaciones lineales de un grupo G en dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K, V_1 y V_2 respectivamente. Un morfismo de representaciones es una aplicación lineal $\varphi : V_1 \to V_2$ de k espacios vectoriales que verifica $\varphi\rho_1(s) = \rho_2(s)\varphi$, es decir φ trasforma ρ_1 en ρ_2 (Serre, 1970).

Se puede decir que dos representaciones lineales $\rho_1 : G \to GL(V_1)$ y $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ son isomorfas si existe un isomorfismo de G-módulos $\phi : V_1 \to V_2$, que verifique la siguiente igualdad $\rho_2 = \rho_1 \circ \varphi$, donde $\varphi : GL(V_1) \to GL(V_2)$ es el isomorfismo de grupos.

Sean $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ un número finito de caracteres de las clases de isomorfismo de representaciones irreducibles y $(\rho_1, W_1), (\rho_2, W_2), \ldots (\rho_s, W_s)$ son representantes de cada clase y $n_1, n_2, \ldots, n_s$ grados de las representaciones, entonces se sigue del teorema de Maschke que todo espacio de representación V es isomorfo a una suma directa:

$$V \cong m_1 W_1 \oplus m_2 W_2 \oplus \ldots \oplus m_s W_s,$$

donde m_i es un número natural.

Así el carácter de la representación puede expresarse de la siguiente manera:

$$\chi_V = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \ldots + m_s\chi_s,$$

entonces por las relaciones de ortogonalidad se cumple que $(\chi_V, \chi_V) = \sum_{i=1}^{s} m_i^2$, y mediante esta igualdad se puede determinar la irreducibilidad de una representación. Esto se afirma gracias al siguiente teorema:

Teorema 4.

Si χ_V es el carácter de una representación (ρ, V), entonces $(\chi_V, \chi_V) = 1$ si y solo si V es irreducible.

Demostración

Si se supone que $(\chi_V, \chi_V) = 1$, entonces

$\left(\chi_V, \chi_V\right) = \sum_{i=1}^{k} m_i^2 = 1$, por lo que debe ser que existe un $j \in \{1,2,\ldots,s\}$ tal que $m_j = 1$ y $m_k = 0$ para todo $k \neq j$, con $k \in \{1,2,\ldots,s\}$, además se cumple que $\chi_V = \chi_{W_i}$ tal que $V \cong W_i$, con esto (ρ, V) es irreducible.

Ahora, si (ρ, V) es una representación irreducible, entonces se sabe que si χ_V es el carácter de una representación irreducible (ρ, V) se cumple que $\left(\chi_V, \chi_V\right) = 1$.

En García (2001) se afirma que hay solo un número finito de clases de isomorfismos de representaciones irreducibles y además toda representación irreducible es isomorfa a una subrepresentación de la representación regular.

Para el cálculo de la cantidad de representaciones irreducibles de un grupo finito dado, es importante tener en cuenta la igualdad $\sum_{i=1}^{k} n_i^2 = g$, siendo n_i el grado de las representaciones irreducibles y g el orden del grupo.

En este trabajo, se estudia un grupo en particular, el cual es el grupo simétrico $\mathbb{S}_n$, y la idea es obtener una forma de encontrar todas las representaciones irreducibles del grupo mencionado y además determinar la tabla de caracteres de este grupo. Para poder obtener estas representaciones irreducibles es necesario tener bien claro los conceptos de: grupo simétrico, permutación, partición, diagramas, tableros, tabloides, politabloides, subgrupos de Young y los módulos de Specht.

A continuación se verá en qué consiste cada uno de ellos.

El grupo simétrico $\mathbb{S}_n$ se define como el grupo, con respecto a la composición, de las biyecciones o permutaciones de un conjunto finito $X = \{1,2,3,\ldots,n\}$. El orden de este grupo está dado por $n!$ (Dubreil, 1975).

Una permutación de X es una lista de $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sin repetición de todos los elementos de X, y la función $\sigma : X \to X$ está dada por $\sigma(j) = i_j$, para todo $j \in X$, esta biyección se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Además se sabe que, dos permutaciones de $\mathbb{S}_n$ pueden ser multiplicadas, y este producto se entiende como composición.

Ejemplo 5.

Sea $N = \{1,2,3,4,5\}$ y σ:N→N definida por:

$\sigma(1)=3, \quad \sigma(2)=4, \quad \sigma(3)=1, \sigma(4)=5, \quad \sigma(5)=2,$

así la permutación σ se escribe de la siguiente manera:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Además toda permutación se puede expresar como producto de ciclos disjuntos y estos pueden escribirse como producto de trasposiciones, es decir se puede escribir como ciclos de dos elementos (James, 1978).

Entonces, el ejemplo anterior se puede expresar así:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sigma = (1 \ \ 3)(2 \ \ 4 \ \ 5)$$
$$\sigma = (1 \ \ 3)(2 \ \ 5)(2 \ \ 4).$$

A continuación se define una partición, y a partir de esta se obtendrán los conceptos de diagrama, tablero, tabloides y politabloides.

Definición 6.

Se dice que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j)$ es una partición de n si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $\lambda_i \in \mathbb{N}_0$, para todo $i = 1,2,\ldots,j$

ii) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_j$.

iii) $\sum_{i=1}^{j} \lambda_j = n$ (James, 1978).

Ejemplo 7.

Sea n = 5, las particiones de 5 están dadas por:

$(1,1,1,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1), (3,2), (3,1,1), (4,1), (5)$.

Cada una de estas particiones, se pueden hacer corresponder con el diagrama de Young.

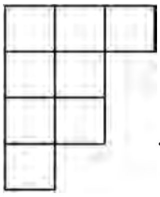
Según James (1978), si λ es una partición de n, entonces un diagrama de Young $[\lambda]$ es el conjunto:

$$[\lambda]=\{(i,j): i,j\in\mathbb{Z}, 1\le i, 1\le j\le \lambda_i\}.$$

Si $(i,j)\in[\lambda]$, entonces (i,j) se denomina un nodo de $[\lambda]$. Por tanto, la *K*-ésima fila (o columna) del diagrama consiste en aquellos nodos cuya primera (respectivamente segunda) coordenada es *K*.

Ejemplo 8.

Si $\lambda=(3,2,2,1)$ es una partición de 8, el diagrama de Young correspondiente $[\lambda]=[3,2,2,1]$ está dado por:



A partir de estos diagramas se pueden obtener los tableros, es decir, si λ es una partición, un tablero de λ es una de las $n!$ matrices que se obtienen al sustituir sin repetición cada nodo de $[\lambda]$ por uno de los enteros $1,2,3, ..., n$.

El tabloide $\{t\}$ se obtiene eliminando las líneas verticales del tablero *t*, además, en este caso, no se toman en cuenta el orden de los elementos de cada fila.

Ejemplo 9.

Un tablero de $\lambda=(3,2,2,1)$ está dado por:

$$t=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 5 & 3\\ \hline 1 & 6 \\ \cline{1-2} 4 & 7 \\ \cline{1-2} 8 \\ \cline{1-1}\end{array},$$

y el tabloide asociado a *t* es el siguiente:

$$\{t\}=\begin{array}{c}\hline 2\ 3\ 5\\ \hline 1\ 6\\ \hline 4\ 7\\ \hline 8\\ \hline\end{array}$$

Ahora se verá en qué consiste un subgrupo de Young.

Sean t un tablero de una partición λ, $R_t=S_{F_1}\times S_2\times\ldots\times S_n$ el subgrupo de $\mathbb{S}_n$ que estabiliza las filas de *t* y $C_t=S_{C_1}\times S_{C_2}\times\ldots\times S_{C_m}$ el subgrupo de $\mathbb{S}_n$ que estabiliza las columnas de *t*, se llaman subgrupos de Young de $\mathbb{S}_n$ a los subgrupos R_t y C_t que se obtienen variando *t* (Cagliero, 2006).

Ahora se define un espacio vectorial, cuyas bases son los distintos tabloides de una partición. En James (1978) se define de la siguiente manera:

Definición 10.

Sea *K* un cuerpo, se denotará como M^{μ} al espacio vectorial sobre *K*, de dimensión finita, cuya base son los diferentes tabloides de μ.

Definición 11.

Sea *t* un tablero de μ. La suma signada por columnas κ_t es un elemento del álgebra de grupo $K[S_n]$ obtenido mediante la suma de los elementos del estabilizador de columnas C_t de *t*, multiplicados por su signatura. Esto es:

$$\kappa_t=\sum_{t\in C_t} sg(\sigma)\sigma.$$

Un politabloide e_t asociado a un tablero *t* está dado por $e_t=\kappa_t\{t\}\in M^{\mu}$ (James, 1978).

Como se tiene por objetivo encontrar todas las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$, se definirán los módulos de Specht que luego ayudarán a encontrar todas las representaciones irreducibles.

Un módulo de Specht S^{μ} para una partición μ de *n* está dado por el submódulo M^{μ} generado por los politabloides (James, 1978).

Se sabe que, si λ es una partición de *n*, M^{λ} es espacio generado por politabloides. Si se considera el conjunto de los números complejos, los subespacios S^{μ} son irreducibles. Tomando otras particiones de *n*, éstas dan todas las clases de isomorfismos de representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$.

Como existe una única partición (n) de *n* tal que $(n-1,1)<(n)$, siendo $<$ la relación de orden parcial entre tabloides y

$car\ \mathbb{C}=0$, entonces: $M^{(n-1;1)}=S^{(n-1;1)}\oplus aS^{(n)}$ y $\dim(M^{(n-1;1)})=\dfrac{n!}{(n-1)!1!}=n.$

Si se tiene que, la dimensión de $S^{(n-1;1)}$ es $n-1$ y la dimensión de $S^{(n)}$ es igual a uno, entonces: $M^{(n-1;1)}=S^{(n-1;1)}\oplus S^{(n)}$.

Esto ayudará a obtener algunas de las representaciones irreducibles, pues en este trabajo se darán los pasos a seguir para hallar todas las representaciones irreducibles del grupo simétrico, en particular se hallarán todas las representaciones irreducibles del grupo simétrico $\mathbb{S}_4$.

Para obtener todas las representaciones irreducibles del grupo simétrico $\mathbb{S}_4$, se procede de la siguiente manera:

Sea

$\mathbb{S}_4=\{(12),(13),(14),(23),(24),(34),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432)\}$.

Se sabe que la cantidad de representaciones irreducibles es igual a la cantidad de clases de conjugación (James, 1978).

Las clases de conjugación de $\mathbb{S}_4$ son las siguientes:

- $\overline{id}=\{id\}$
- $\overline{(1\,2)}=\{(1\,2),(1\,3),(1\,4),(2\,3),(2\,4),(3\,4)\}$.
- $\overline{(1\,2\,3)}=\{(1\,2\,3),(1\,3\,2),(1\,2\,4),(1\,4\,2),(1\,3\,4),(1\,4\,3),(2\,3\,4),(2\,4\,3)\}$.
- $\overline{(1\,2)(3\,4)}=\{(1\,2)(3\,4),(1\,3)(2\,4),(1\,4)(2\,3)\}$.
- $\overline{(1\,2\,3\,4)}=\{(1\,2\,3\,4),(1\,2\,4\,3),(1\,3\,2\,4),(1\,3\,4\,2),(1\,4\,2\,3)(1\,4\,3\,2)\}$.

Se sabe que las particiones de 4 están dadas por $(4),(2,2),(3,1),(2,2),(1^4)$, entonces las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_4$ están dadas por:

$$\mathrm{S}^{(4)},\ \ \mathrm{S}^{(2,2^2)},\ \ \mathrm{S}^{(1^4)}.$$

Ahora se debe hallar el carácter de cada representación para luego determinar la tabla de caracteres, que es una tabla en la que se encuentra toda la información básica de los caracteres de las representaciones irreducibles de G.

Dicha tabla está formada de la siguiente manera: en el borde superior, se encuentra un elemento de cada clase de conjugación de G, cada una con la cantidad de elementos sobre ella, sobre el borde izquierdo los G-módulos simples, y en cada lugar de la tabla, el valor de los caracteres evaluados en cada clase de conjugación.

Se ha visto que $M^{(n-1,1)}=S^{(n)}\otimes S^{(n-1;1)}$, entonces $M^{(3,1)}=S^{(4)}\otimes S^{(3,1)}$, con esto, el carácter $\chi_{M^{(3,1)}}=\chi^{(4)}+\chi^{(3,1)}$.

Ahora se hallarán los valores que toma el carácter $\chi^{(3,1)}$.

Sea B una base dada de la siguiente manera:

$$B=\{(1,-1,0,0),\ (0,0,1,-1),\ (0,1,0,-1)\}.$$

A partir de ésta base se obtienen las trazas sobre las clases de conjugación de $\mathbb{S}_4$, y están dadas por:

$Tr(id)=3$, $Tr(\rho(1,2))=1$, $Tr(\rho(1,2)(3,4))=-1$, $Tr(\rho(1,2,3))=0$, $Tr(\rho(1,2,3,4))=-1$.

Es decir los caracteres de la representación $S^{(3,1)}$ están dadas por $3,1,-1,0,-1$.

Los caracteres de la representación trivial $S^{(4)}$ son 1, 1, 1, 1, 1 y los de la representación signo $S^{(1^4)}$ son $1,-1,1,1,-1$.

Para determinar los caracteres de las representaciones $S^{(2,2)}$ y $S^{(2,1^2)}$ se utiliza la conjugada de la partición (3,1), que consiste en cambiar las filas por las columnas en el diagrama.

Se sabe que la conjugada de la partición (3,1) es $(2,1^2)$, entonces, se cumple que:

$$S^{(2,1^2)}\cong S^{(1^4)}\otimes S^{(3,1)},$$

Por lo tanto, su carácter se puede calcular usando la siguiente igualdad:

$$\chi^{(2,1^2)}=\chi^{(1^4)}.\chi^{(3,1)}.$$

A continuación se usarán las relaciones de ortogonalidad para obtener los caracteres de la representación $S^{(2,2)}$.

La dimensión de $S^{(2,2)}$ es 2, entonces se toman dos tableros estándar t_1 y t_2, que son tableros en los que, los coeficientes del mismo aumentan a lo largo de las filas y hacia abajo en las columnas. Sean $\{t_1\}$ y $\{t_2\}$ tabloides de t_1 y t_2 respectivamente, dados de la siguiente manera:

$$\{t_1\}=\begin{array}{c}\overline{1\ \ 2}\\ \underline{3\ \ 4}\end{array}\ ,\ \{t_2\}=\begin{array}{c}\overline{1\ \ 3}\\ \underline{2\ \ 4}\end{array}\ ,$$

Entonces mediante los estabilizadores de columnas de t_1 y t_2 se pueden hallar los politabloides e_{t_1} y e_{t_2} tales que

$$e_{t_1}=\begin{array}{c}\overline{1\ \ 2}\\ \underline{3\ \ 4}\end{array}-\begin{array}{c}\overline{3\ \ 2}\\ \underline{1\ \ 4}\end{array}-\begin{array}{c}\overline{1\ \ 4}\\ \underline{3\ \ 2}\end{array}+\begin{array}{c}\overline{3\ \ 4}\\ \underline{1\ \ 2}\end{array}$$

$$e_{t_2}=\begin{array}{c}\overline{1\ \ 3}\\ \underline{2\ \ 4}\end{array}-\begin{array}{c}\overline{2\ \ 3}\\ \underline{1\ \ 4}\end{array}-\begin{array}{c}\overline{1\ \ 4}\\ \underline{3\ \ 2}\end{array}+\begin{array}{c}\overline{2\ \ 4}\\ \underline{1\ \ 3}\end{array}.$$

Es fácil ver que $\chi^{(2,2)}(id)=2$. Para calcular el carácter $\chi^{(2,2)}((1\ \ 2))$, se deben hallar los politabloides $(1\ \ 2)e_{t_1}$ y $(1\ \ 2)e_{t_2}$, luego se calcula la traza de la matriz $[(1\ \ 2)]_B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, donde $B=\{e_{t_1},e_{t_2}\}$.

Siguiendo el mismo procedimiento se obtienen los valores de los caracteres $\chi^{(2,2)}((1\ 2)(3\ 4))$, $\chi^{(2,2)}((1\ 2\ 3))$ y $\chi^{(2,2)}((1\ 2\ 3\ 4))$. Así los caracteres de la representación $S^{(2,2)}$ son $2,0,2,-1,0$.

Entonces la tabla de caracteres de $\mathbb{S}_4$ está dada como en se muestra en la Tabla 1:

Tabla 1: Tabla de caracteres del grupo simétrico $\mathbb{S}_4$.

$\mathbb{S}_n$	1 id	6 $(1\ 2)$	3 $(1\ 2)(3\ 4)$	8 $(1\ 2\ 3)$	6 $(1\ 2\ 3\ 4)$
$S^{(4)}$	1	1	1	1	1
$S^{(3,1)}$	3	1	–1	0	–1
$S^{(2,2)}$	2	0	2	–1	0
$S^{(2,1^2)}$	3	–1	–1	0	–1
$S^{(1^4)}$	1	–1	1	1	–1

En general, para calcular el carácter del módulo de Specht se puede realizar utilizando la Fórmula de Frobenius y está dada de la siguiente manera:

$$\chi^{\lambda}(C_i)=[\Delta(x)\Pi_j P_j(x)^{i_j}]_{l_1,l_2,\ldots,l_k}.$$

Donde λ es una partición de n, C_i clases de conjugación de $\mathbb{S}_n$, donde i está dada por la sucesión $i=(i_1,i_2,\ldots,i_n)$, con $n=\sum \alpha i_\alpha$, $x_1,x_2,\ldots,x_k$ son variables independientes con k mayor o igual a la cantidad de filas en el diagrama de Young de $\lambda, l_1,l_2,\ \ ,l_k$ una k-tuplas de enteros positivos, $P_j(x)$ suma de potencias, con $1\leq j\leq n$, dado por $P_j(x)=x_1^j,x_2^j,\ldots,x_k^j$, $\Delta(x)=\Pi_{i<j}(x_i-x_j)$ el discriminante $\Delta(x)=\Pi_{i<j}(x_i-x_j)$.

Además, mediante la fórmula de Frobenius, la dimensión del módulo de Specht se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$\dim(S^{\lambda})=\chi^{\lambda}(C_{(n)})=[\Delta(x)(x_1,x_2,\ldots,x_n)^n]_{(l_1,l_2,\ \ l_k)}.$$

Esto ayudará a realizar investigaciones posteriores sobre este tema.

CONCLUSIONES

Si bien la teoría general de representaciones lineales de grupos finitos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero dice que toda representación es absolutamente reducible en suma de representaciones simples y que la cantidad de representaciones simples coincide con la cantidad de clases de conjugación del grupo, encontrar explícitamente las representaciones simples de un grupo dado puede ser una tarea muy difícil.

Mediante este trabajo, se puede notar que para el estudio de las representaciones del grupo simétrico no se precisan de muchos conocimientos previos, basta con tener nociones básicas sobre la teoría de grupos.

La teoría de representaciones de los grupos simétricos adquiere una singular belleza ya que puede describirse en términos combinatorios, como diagramas de Young, tabloides, entre otros.

Estas herramientas combinatorias sirven para realizar estudios posteriores, como por ejemplo, la Teoría de Brauer de representaciones modulares.

Esta teoría, además de ser interesante en sí misma, sirve también para obtener la descripción de otras representaciones de grupos, tales como las del grupo general lineal $GL(n)$ y el grupo especial lineal $SL(n)$, y sus respectivas algebras de Lie.

De esta manera, se puede concluir que han sido obtenidas las herramientas necesarias para iniciar el estudio de las representaciones de cualquier grupo finito G, que sirve como una primera aproximación al estudio de la teoría de representaciones de álgebras más generales, como las álgebras de Schur, las álgebras de Schur cuantizadas, las álgebras de Lie, los grupos cuánticos asociados a álgebras de Lie reductivas, y mas generalmente a álgebras de Hopf.

AGRADECIMIENTOS

Al Prof. Dr. Gastón Andrés García y al Prof. MSc. Gustavo Gonzáles, por la inmensa ayuda que me brindaron para la realización de este trabajo.

LITERATURA CITADA

DUBREIL, P. 1975.Teoría de Grupos. Editorial Reverté, S.A.

ETINGOF, P; GELAKI, S. 2001. Socategorical groups. Internat. Math. Res. Notices 2001, no. 2, 59-76.

GARCIA, G. A. 2001. Representaciones de los Grupos Simétricos. Universidad de Buenos Aires.

CAGLIERO, L. 2006. Representaciones del Grupo Simétrico. Serie B.

HORNHOFF, L. 1971. Group Representation Theory. Marcel Dekker, New York.

ISAACS, I. M. 1976. Character Theory of Finite Groups. Academic Press, New York.

JAMES, G. D. 1978. La Teoría de Representaciones de los Grupos Simétricos. Springer, PP.13.

SERRE, J. P. 1970. Representaciones Lineales de los Grupos Finitos. Ediciones Omega S. A.

SUAREZ, M. 2011. Representaciones de Grupos Finitos. Serie B. Universidad Nacional de Córdoba.

VELAZQUEZ, C. 2009. Representaciones Lineales de Grupos Finitos. Universidad Nacional de Asunción.

VILLARROEL, R. 2006. Introducción a la teoría de representaciones de grupos finitos.