Reportes Científicos de la FACEN

Vol. 5, Nº 1 (2014): 23-28

Artículo Original

SOBRE LOS CICLOS LÍMITE ALGEBRAICOS DE LOS SISTEMAS CUADRÁTICOS

ABOUT THE ALGEBRAIC LIMIT CYCLES OF THE QUADRATIC SYSTEMS

Sabino Acosta Delvalle[1]

[1]Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Asunción, San Lorenzo. E-mail: sabinoad@hotmail.es

Resumen: En este artículo, se estudian los ciclos límite algebraicos de los campos vectoriales polinomiales planos reales de segundo grado. Se dará la clasificación de los ciclos límites de sistemas cuadráticos conocidos hasta la actualidad, es decir; los de grado 2, de grado 3 (que no existe), y los de grado 4. Los de grado 5 y 6 están parcialmente estudiados. Y aún no se sabe si hay ciclos límite algebraicos de grado mayor que 6 en los sistemas cuadráticos.

Palabras clave: Ecuaciones Diferenciales Cualitativas, campos vectoriales polinomiales planos reales de segundo grado, Ciclos límite algebraicos.

Abstract: In this article we study the algebraic limit cycles of a real affine quadratic polynomial vector field. It is known that the only algebraic limit cycles which are completely classified are those of degree 2, of degree 3 (which does not exist), and of degree 4. The ones of degree 5 and 6 are partially studied. And it is unknown if there exists algebraic limit cycles of degree greater than 6 in quadratic systems.

Keywords: Qualitative Differential Equations, Real affine quadratic polynomial vector field, Algebraic limit cycles.

INTRODUCCIÓN

Se presenta una clasificación de los ciclos límite de los sistemas cuadráticos conocidos hasta la fecha. Un sistema cuadrático es un sistema diferencial polinomial en el plano. A tales sistemas se puede asociar un campo vectorial polinomial de segundo grado. Dentro de los mencionados campos vectoriales polinomiales se puede introducir las ideas de ciclos límite algebraicos como una solución periódico aislada real en el conjunto de todas las soluciones periódicas contenido en el conjunto de puntos de una curva algebraica invariante.

Recién en 1958 se descubrió que los sistemas cuadráticos podían tener ciclos límite algebraicos de grado 2. Entre 1970 y 1979 se demostró que los sistemas cuadráticos no tenían ciclos límite algebraicos de grado 3. En 1970 se probó que los sistemas cuadráticos podían tener ciclos límite algebraicos de grado 4, en 1973 otra familia de ciclos límite algebraicos de grado 4 fue encontrada. Más adelante, se demostró que además de las dos familias mencionadas de ciclos límites algebraicos de grado 4 hay otras dos familias adicionales, y no más de grado 4. Finalmente, se comprobó que los sistemas cuadráticos podían tener ciclos límite algebraicos de grado 5 y de grado 6.

Para finalizar este trabajo se presenta algunos problemas abiertos que aparecieron en el estudio de los ciclos límite algebraico de los campos vectoriales polinomiales en el plano real.

METODOLOGÍA

Para la realización de este artículo se procede a la investigación bibliográfica para así comprender los resultados de la teoría cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales, específicamente en la teoría de Ciclos límite.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Sistemas Cuadráticos

Todo el trabajo se centra en los denominados sistemas cuadráticos, por lo que se empezará definiendo la misma. Para ello, se considera el sistema diferencial polinomial

Recibido: 20/05/2014

Aceptado: 17/12/2014

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

donde *P(x,y)* y *Q(x, y)* son polinomios coprimos reales. Si el máximo de los grados de *P* y *Q* es *m*, entonces se dice que el sistema (1) es de grado *m*. Si *m* = 2, tales sistemas se denominan *sistemas cuadráticos*.

Curvas algebraicas invariantes

Sea $\mathbb{R}[x,y]$ el anillo de polinomios en las variables *x* e *y* con coeficientes reales. Sea $f \in \mathbb{R}[x,y]$. Se dice que *f = f(x,y) = 0* es una curva algebraica invariante del sistema (1) si cumple la siguiente relación:

$$\frac{\partial f}{\partial x}P(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}Q(x,y)=k(x,y)\,f(x,y)$$

para algún polinomio *k(x,y)* de grado a lo sumo *m* □ 1. Al polinomio *k(x,y)* se lo llama el cofactor de *f(x,y)*. Si el cofactor es idénticamente cero, entonces *f(x,y)* es una integral primera polinomial para el sistema (1).

Ciclos límite algebraicos

Se define el *ciclo límite* del sistema (1) como una solución periódica aislada real en el conjunto de todas las soluciones periódicas. Si además, el ciclo límite está contenido en el conjunto de puntos de una curva algebraica invariante se lo denomina *ciclo límite algebraico*. Se dice que un ciclo límite es de grado *n* si está contenido en el conjunto de puntos de una curva algebraica invariante irreducible de grado *n*.

Se enuncia un teorema que ayuda a clasificar los ciclos límite de los sistemas cuadráticos:

Teorema 1.

Sea *f(x,y)* = 0 una curva real algebraica invariante de grado mayor que 1 para el sistema cuadrático real (1) con *p(x,y)* y *q(x, y)* coprimos. Sea *k(x,y)* el cofactor de *f*. Se define

$$P(X,Y,Z)=Z^2p\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right),\ Q(X,Y,Z)=Z^2q\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right),$$

$$K(X,Y,Z)=Zk\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)$$

Supóngase que se tiene dos puntos A_1 y A_2 en $\mathbb{C}P^2$ de tal manera que $P(A_i) = Q(A_i) = 0$ y $K(A_i) = 0$ para $i = 1,2$. Entonces todos los ciclos límite del sistema se encuentran en f = 0, por lo que en particular, son algebraicos.

La demostración de este teorema se puede encontrar con detalles en Chavarriga *et al.* (2001a).

Clasificación de los ciclos límite algebraicos de los Sistemas Cuadráticos

Ciclos límite algebraicos de grado 2

Si un sistema cuadrático tiene un ciclo límite algebraico de grado 2, entonces después de un cambio de las variables afín, el ciclo límite se convierte en el círculo $\Gamma := x^2 + y^2 - 1 = 0$. Por otra parte, Γ es el único ciclo límite del sistema cuadrático que se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(ax+by+c)-(x^2+y^2-1) \\ \dot{y} = x(ax+by+c) \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

con $a \neq 0$, $c^2 + 4(b+1) > 0$ y $c^2 > a^2 + b^2$.

Demostración

Se considera el sistema cuadrático (2) que tiene el ciclo límite algebraico $f = x^2 + y^2 - 1 = 0$ con cofactor $K = -2x$. Esto es,

$$\begin{aligned} P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y} &= \left[-y(ax+by+c)-(x^2+y^2-1)\right]2x + x(ax+by+c)2y \\ &= -2xy(ax+by+c)-2x(x^2+y^2-1)+2xy(ax+by+c) \\ &= -2x(x^2+y^2-1) \\ &= kf \end{aligned}$$

Los componentes *P* y *Q* del campo vectorial asociado al sistema (2) son coprimos. Usando la inecuación $c^2 + 4(b+1) < 0$ se sigue que los puntos $A_1 = (0,\alpha_+,1)$ y $A_2 = (0,\alpha_-,1)$ con

$$\alpha_{\pm} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2+4(b+1)}}{2(b+1)} \in \mathbb{C}$$ Satisfaciendo

$P(A_i) = Q(A_i) = 0$ y $K(A_i) = 0$ para $i = 1,2$

Por lo tanto, el sistema (2) satisface todas las hipótesis del ***Teorema 1***; y en consecuencia se tiene un único ciclo límite, que es $f = 0$.

Ciclos límite algebraicos de grado 3

Los campos vectoriales polinomiales cuadráticos afín real no tienen ciclos límite algebraico de grado 3.

Este resultado se prueba en Chavarriga *et al.* (2001b), con los detalles y las aclaraciones para entender el mecanismo de análisis.

En esta sección se muestra un esbozo de la prueba del resultado mencionado.

Sea $f = 0$ una curva algebraica invariante de grado 3 de un campo vectorial polinomial afín real de segundo grado. Si la curva cúbica $f = 0$ tiene *puntos múltiples*, entonces debe ser racional y no puede contener forma ovalada.

Si $f = 0$ no tiene puntos múltiples, la ecuación

$$h + h' = \frac{d^3 + (r-1)^3}{d + r - 1} = d^2 + \left(r-1\right)(r - d + 1)$$

implica que $h = 2^2 = 4$

Con lo que el sistema tiene una integral primera racional (Ver Chavarriga *et al.* (2001b)) y por lo tanto no hay ciclo límite.

Ciclos límite algebraicos de grado 4

Después de un cambio de variable afín los únicos sistemas cuadráticos con un ciclos límite algebraicos de grado 4 son:

(a) Sistema de Yablonskii

$$\begin{cases} \dot{x} = -4abcx - \left(a+b\right)y + 3\left(a+b\right)cx^2 + 4xy \\ \dot{y} = \left(a+b\right)abx - 4abcy + \left(4abc^2 - \dfrac{3\left(a+b\right)^2}{2} + 4ab\right)x^2 + 8\left(a+b\right)cxy + 8y^2 \end{cases}$$

con $abc \neq 0$, $a \neq b$, $ab > 0$, y $4c^2(a-b)^2 + (3a-b)(a-3b) < 0$.

Este sistema posee la curva algebraica invariante irreducible $(y + cx^2)^2 + x^2(x-a)(x-b) = 0$, de grado 4 con dos componentes; un óvalo (el ciclo límite algebraico) y un punto aislado (un punto singular). Ver Figura 1a.

(b) Sistema de Filiptsov

$$\begin{cases} \dot{x} = 6\left(1+a\right)x + 2y - 6\left(2+a\right)x^2 + 12xy \\ \dot{y} = 15\left(1+a\right)y + 3a\left(1+a\right)x^2 - 2\left(9+5a\right)xy + 16y^2 \end{cases}$$

con $0 < a < 3/13$. Este sistema posee una curva algebraica invariante irreducible $3(1+a)(ax^2+y)^2 + 2y^2(2y - 3(1+a)x) = 0$, de grado 4 con dos componentes; uno es un óvalo y el otro es homeomorfo a una línea recta. Este último componente incluye tres puntos singulares del sistema. Ver Figura 1b.

(c) El sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 6x^2 + 4\left(1+a\right)xy + ay^2 \\ \dot{y} = x + 2y + 4xy + \left(2+3a\right)y^2 \end{cases}$$

con $(-71 + 17\sqrt{17})/32 < a < 0$ posee una curva algebraica invariante irreducible $x^2 + x^3 + x^2y + 2axy^2 + 2axy^3 + a^2y^4 = 0$, de grado 4 con tres componentes; uno es un óvalo y cada uno de los otros dos es homeomorfo a una línea recta. Cada uno de estos dos últimos componentes contiene un punto singular del sistema. Ver Figura 1c.

(d) El sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\left(1 + 2x - 2ax^2 + 6xy\right) \\ \dot{y} = 8 - 3a - 14ax - 2axy - 8y^2 \end{cases}$$

con $0 < a < 1/4$ posee la curva algebraica invariante irreducible $\frac{1}{4} + x - x^2 + ax^3 + xy + x^2y^2 = 0$, de grado 4 que tiene tres componentes: uno es un óvalo y cada uno de los otros dos es homeomorfo a una línea recta. Cada uno de estos dos últimos componentes contiene un punto singular del sistema. Véase Figura 1d.

Ciclos límite algebraicos de grado 5 y 6

En esta apartado se presentarán ejemplos de siste-

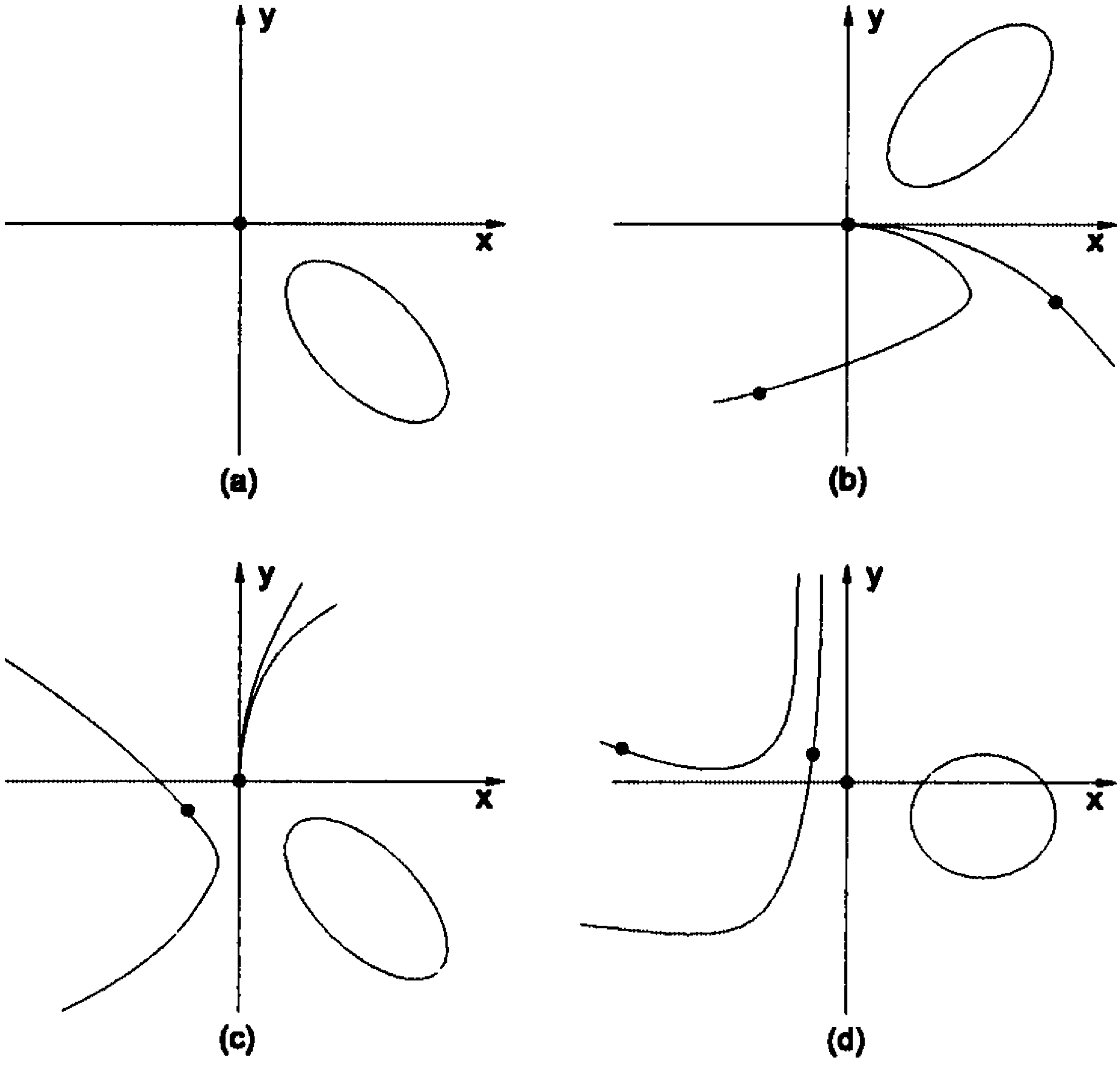

Figura 1. Ciclos límite algebraicos de grado 4.

mas cuadráticos que tienen ciclos límite algebraicos de grado 5 y de grado 6.

La idea principal que se utiliza es la de aplicar un cambio de variables de un sistema cuadrático conocido con un ciclo límite algebraico, que conserva el grado del sistema, pero aumenta el grado de la curva algebraica invariante. A fin de obtener lo que se necesitan también se debe cambiar la variable independiente o el tiempo del sistema. Para esto se utiliza la transformación birracional $(x,y)=\left(\frac{x}{y^2},\frac{1}{y}\right)$, luego de una adecuada traslación.

Si el sistema es de la forma $\begin{cases}\dot{x}=\alpha x+\beta y+2ex^2+bxy+cy^2\\ \dot{y}=\gamma x+\delta y+exy+fy^2\end{cases}$, donde el punto denota derivada con respecto al tiempo $\boldsymbol{t}$, entonces la aplicación de la transformación $X=\frac{x}{y^2}$, $Y=\frac{1}{y}$, y haciendo el cambio de tiempo $dt=Yds$, el sistema anterior aún está en la clase de sistemas cuadráticos, es decir, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} x' = -eX - fY - \gamma XY - \delta Y^2 \\ y' = (b-2f)X + cY - 2\gamma X^2 + (\alpha - 2\delta)XY + \beta Y, \end{cases}$$

donde la prima denota la derivada con respecto al tiempo *s*.

Un ejemplo de este tipo de transformación se puede encontrar en Christopher *et al.* (2005), en donde se demuestra que el sistema de Yablonskii, presentado en este artículo, con ciclo límite algebraico de grado 4 se puede obtener a partir de un ciclo límite algebraico de grado 2.

Ahora se aplicará la transformación al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\left(1 + 2x - 2ax^2 + 6xy\right) \\ \dot{y} = 8 - 3a - 14ax - 2axy - 8y^2 \end{cases}$$

que tiene la curva algebraica invariante $\frac{1}{4} + x - x^2 + ax^3 + xy + x^2y^2 = 0$, que define un ciclo límite algebraico de grado 4 para $0 < a < 1/4$. Los detalles de la transformación se pueden encontrar en Christopher *et al.* (2005).

El sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 28x - \dfrac{12}{\alpha+4}y^2 - 2\left(\alpha^2 - 16\right)\left(12+\alpha\right)x^2 + 6\left(3\alpha - 4\right)xy \\ \dot{y} = \left(32 - 2\alpha^2\right)x + 8y - \left(\alpha + 12\right)\left(\alpha^2 - 16\right)xy + (10\alpha - 24)y^2 \end{cases}$$

que tiene una curva algebraica invariante irreducible de grado 5 dada por

$$x^2 + (16-\alpha^2)x^3 + (\alpha-2)x^2y + \frac{1}{(4+\alpha)^2}y^4 - \frac{6}{(4+\alpha)^2}y^5 - \frac{2}{4+\alpha}xy^2$$
$$+\frac{(\alpha-4)(12+\alpha)}{4}x^2y^2 + \frac{12+\alpha}{4+\alpha}xy^4 + \frac{8-\alpha}{4+\alpha}xy^3 = 0$$

Para $\alpha \in \left(\frac{3\sqrt{7}}{2}, 4\right)$ la curva anterior contiene un ciclo límite algebraico de grado 5.

La prueba de esta última afirmación se puede encontrar en Christopher *et al.* (2005).

Por otro lado, aplicando transformaciones se puede mostrar un ejemplo de sistema cuadrático con ciclo límite algebraico de grado 6.

El sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 28\left(\beta - 30\right)\beta x + y + 168\beta^2x^2 + 3xy \\ \dot{y} = 16\beta\left(\beta - 30\right)\left(14\left(\beta - 30\right)\beta x + 5y + 84\beta^2x^2\right) + 24\left(17\beta - 6\right)\beta xy + \beta 6y^2 \end{cases}$$

que tiene una curva algebraica invariante irreducible de grado 6 dada por

$$-7y^3 + 3(\beta-30)^2\beta y^2 + 18(\beta-30)(-2+\beta)\beta xy\,\hat{}\,2 + 27(\beta-2)^2\beta x^2y^2$$
$$+24(\beta-30)^3\beta^2xy + 144(\beta-30)(\beta-2)^2\beta^2x^3y + 48(\beta-30)^4\beta^3x^2$$
$$+576(\beta-30)^2(-2+\beta)^2\beta^3x^4 - 432(\beta-2)\,\hat{}\,2\beta^2(3+2\beta)x^4y - 3456(\beta$$
$$-30)(-2+\beta)^2\beta^3(3+2\beta)x^5 + 3456(\beta-2)^2\beta^3(12+\beta)(3+2\beta)x^6$$
$$+24(\beta-30)^2\beta^2(9\beta-4)x^2y + 64(\beta-30)^3\beta^3(9\beta-4)x^3 = 0$$

Para $\beta \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ la curva presentada contiene un ciclo límite algebraico de grado 6.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha detallado uno de las temáticas más importante de la Teoría cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales. A lo largo del documento se ha logrado la clasificación de los ciclos límite algebraicos de los sistemas cuadráticos en el plano conocidos hasta la fecha, explicitando las ecuaciones que las definen.

En el desarrollo del trabajo se detallaron las siguientes aseveraciones: un campo vectorial polinomial cuadrático afín real puede tener un único ciclo límite algebraico de segundo grado; no existen sistemas cuadráticos con ciclo límite algebraico de grado 3; en tanto que existen cuatro familias con ciclos límites algebraicos de grado 4, con la especificidad de que si un sistema cuadrático tiene ciclo límite algebraico de grado 4, este es el único ciclo límite del sistema. Además, se ha encontrado una familia de sistemas de segundo grado con ciclo límite de grado 5 y otro de grado 6, estos dos últimos se obtienen mediante cambio de coordenadas. Se especifica que cada ciclo límite algebraico de los sistemas cuadráticos estudiados, están contenidos en curvas algebraicas invariantes, por lo que la forma de obtener los ciclos límite es identificar los curvas algebraicas invariantes que los contiene.

AGRADECIMIENTO

A Dios, por darme la fortaleza espiritual y física. A todas las personas que de una u otra manera hicieron posible la culminación del presente trabajo.

LITERATURA CITADA

CHAVARRIGA, J.; GIACOMINI H.; LLIBRE, J. 2001a. Uniqueness of algebraic limit cycles for quadratic system, J. Math. Anal. Appl.

261: 85-99.
CHAVARRIGA, J.; LLIBRE, J.; MOULIN OLLAGNIER, J. 2001b. On a result of Darboux, LMS J. Comput. Math. 4: 197-210.
CHRISTOPHER, C.; LLIBRE, J.; SWIRSZCZ, G. 2005. Invariant algebraic curves of large degree for quadratic system, J. Math. Anal. Appl. 303: 450-461.