Reportes Científicos de la FACEN
Vol. 2, Nº 1 (2011)

Artículo Original

# PROCESOS DE RAMIFICACIÓN: UNA APLICACIÓN EN LA POBLACIÓN AMERICANA

# BRANCHING PROCESSES: AN APPLICATION TO THE AMERICAN POPULATION

Fernando Giménez Sena[1] & Xavier Bordina i Simorra[2]

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Asunción, Paraguay. Email: ferdisena@facen.una.py
[2]Universidad Autónoma de Barcelona España

**Resumen:** La teoría de los procesos de ramificación son utilizadas en diversas áreas de aplicación. En particular la biología para sus estudios de la evolución de poblaciones biológicas de cualquier naturaleza; y más específicamente, en el estudio de la evolución de poblaciones humanas. En este trabajo se revisan conceptos básicos para caracterizar estos procesos, y se estudian las funciones generatrices de probabilidades para derivar resultados sobre la evolución y extinción de poblaciones en términos de procesos de ramificación. Un ejemplo aplicado a la población americana ilustrará los conceptos estudiados.

***Palabras clave:*** *Función generatriz de probabilidades, Procesos de ramificación.*

**Abstract:** Branching process theory has several applications. In particular, bio- logy has use of it to study population evolution of any type, specifically in studies of human populatios. This work reviews the basic concepts that characterize these processes, and studies the probability generating functions which are useful for the development of results that are further applied to get results on evolution and extinction of populations in terms of branching processes. An example for an american population is presented to illustrate the reviewed theory.

***Keywords:*** *Probability generating function, Branching processes.*

## INTRODUCCIÓN

La biología tiene un lugar especial dentro de las ciencias naturales ya que las unidades biológicas, porciones de ADN, células, u organismos, se reproducen con mayor o menor eficacia. Los procesos de ramificación juegan un papel importante tanto en la biología teórica y en la aplicada, en particular en los estudios de la variación, crecimiento y extinción de poblaciones; esta teoría es singularmente útil como herramienta matemática para comprender y representar el proceso biológico de la reproducción que tiene un gran componente aleatorio.

La teoría permite hacer predicciones con relación a los riesgos de extinción y al desarrollo de la composición de la población, y además descubre aspectos de la historia de la población a partir de alguna configuración inicial. En este campo los procesos de ramificación tienen una creciente importancia en el modelado genético, la biología molecular, la microbiología, ecología y la teoría de la evolución. Haccou et al. (2005), Theodorou y Couvet (2006) y Bennewitz J. y Meuwissen T. H. E. (2005).

El tema se desarrolla con una introdución en la sección 1. La sección 2 se ocupa de los conceptos de Función Generatriz de Probabilidades, para variables aleatorias discretas; seguida de la sección 3 donde esta función es expandida como una serie de potencias y se conecta con el valor esperado de una variable aleatoria. En la siguiente sección se presenta el Proceso de Ramificación básico, en el marco de los procesos poblacionales, y analizamos su evolución y extinción. Finalmente es presentado un ejemplo, seguido de algunas consecuencias derivadas de los conceptos estudiados.

## FUNCIÓN GENERATRIZ DE PROBABILIDADES

Las funciones generatrices son ampliamente utilizadas en matemática y juegan un rol muy importante en la teoría de probabilidades; en este capítulo se revisarán los conceptos básicos y serán derivadas algunas propiedades principales, particularmente en matemática discreta y análisis combinatorio, Esquivel M. (2004), Lando S. K. (2003). Es un método muy potente para encontrar la distribución de probabilidad de sumas de dos o más variables aleatorias independientes discretas.

Algunas referencias, en el cálculo para variables aleatorias con valor discreto en probabilidad básica en Feller W. (1968); como valor esperado de una variable aleatoria en Hoffman-Jørgensen (1997); en la construcción de modelos probabilísticos: para testar modelos Poisson en Nakamura et al. (1993a); pruebas de ajuste para distribuciones discretas en Rueda et al. (1999); para encontrar distribuciones mixtas en Villa y Escobar (2006); se encuentran además aplicaciones en economía Nakamura et al. (1993b) y en modelos de choques (shock models), Roychoudhury y Bhattacharjee (2006); y así en muchos otros campos.

### 2.1. Función Generatriz de Probabilidades

Esta función es una herramienta matemática y por tanto es de difícil imaginación pues no corresponde a un concepto directamente observable. Formalmente es una serie de potencias, que en un contexto probabilístico representa a una función generatriz de probabilidades. Estas funciones tienen propiedades interesantes y con frecuencia reducen en gran medida el esfuerzo que implica analizar una distribución de probabilidad. El punto importante a notar es que, para variables discreta, el coeficiente del desarrollo en series es la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor específico.

**Definición 1.** *Función generatriz:*

*Sea una sucesión* $\{a_i,\ i = 0,1,2...\}$ *con* $a_i \in \mathbb{R}$ *La función,*

$$G(s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i s^i \qquad (1)$$

*donde s es tal que la suma converge, se llama función generatriz.*

*P*ara una serie dada, existe $R \geq 0$ (estrictamente mayor que cero), tal que si $|s|<R$ la suma converge; mientras que si $|s|>R$ la suma diverge o toma valores discretos no negativos.

**Definición 2.** *Probabilidad de una variable aleatoria. Sea una variable aleatoria discreta X con valores en* $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$*, esto es, solo toma valores discretos no negativos. Entonces, la probabilidad de que la variable aleatoria, tome un valor particular k, se denota como* $p_k = P(X = k)$*,* $k = 0,1,2...$ *y es tal que*

1. $p_k \geq 0$.
2. $\sum p_k = 1$ *la suma sobre todo el conjunto de valores k posibles.*
3. *Para un conjunto de valores de k;* $k_1, k_2, ...,$ *se cumple que la probabilidad que la variable tome el valor* $k_1$*, o tome el valor* $k_2$*, y así sucesivamente,... está dado por* $p_{k_1} + p_{k_2} + ...$

*Valores de k que no pueden ocurrir tienen asignada probabilidad nula.*

**Definición 3.** *Función Generatriz de Probabilidades de una Variable Aleatoria Discreta, es la función,*

$$G_x(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k = E(s^k) \qquad (2)$$

*siempre que la suma esté definida y sea finita se denomina Función generatriz de probabilidades de la variable aleatoria discreta X. El dominio de definición es un subconjunto de los reales, esto es* $D_X \subset \mathbb{R}$*, y el recorrido el conjunto de los reales.*

La serie puede descomponerse en, $G_x(s) = P(X = 0) + \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$; haciendo $s$=0, y como el primer término de la sumatoria no depende de $s$, se obtiene que $G_x(0) = P(X = 0) = p_0$.

Similarmente, haciendo $s$=1, resulta la expresión siguiente, $G_x(1)=\sum_{k=0}^{\infty}1^k p_k=\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)=1$; de modo que la serie converge absolutamente para $|s|\leq 1$.

Por otra parte, cuando $s\neq 0$ se obtiene, $G_x(s)=\sum_{k=0}^{\infty}s^k P(X=k)=E(s^k)$.

### 2.2. Algunos ejemplos de FGP

Vemos algunos ejemplos de funciones generatriz de probabilidades para variables aleatorias que siguen ciertas leyes de distribución conocidas.

**Distribución Uniforme**

Sea una variable aleatoria con función distribución de probabilidad igual a $P(X=k)=1/n$ con $k$=1,2,...,$n$. Su función generatriz está dada por, $G(s)=0s^0+\frac{1}{n}s^1+\frac{1}{n}s^2+\frac{1}{n}s^3+...+\frac{1}{n}s^n$.

**Distribución Binomial**

Para la ley Binomial, el conjunto de probabilidades está proporcionado por su distribución de probabilidad, que tiene ecuación dada por $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ con $k=0,1,...,n$; su función generatriz está dada por el desarrollo de $((1-p)+ps)^n$, que luego de un poco de álgebra tiene forma, $G(s)=((1-p)+ps)^n$.

La primera y segunda derivadas respectivamente son, $G^{(1)}(s)=n((1-p)+ps)^{n-1}p$; $G^{(2)}(s)=n(n-1)((1-p)+ps)^{n-2}p^2$.

Consecuentemente, $G(1)=((1-p)+p)^n=1$,

$G^{(1)}(1)=n((1-p)+p)^{n-1}p=np=E(X)$;

$G^{(2)}(1)=n(n-1)((1-p)+p)^{n-2}p^2=n(n-1)p^2$.

**Distribución Poisson**

Una variable aleatoria discreta $X$, tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda$, si su función de distribución de probabilidad está dada por, $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ con $k$ = 0, 1, 2, ... Es útil para modelar el número de ocurrencias de un evento en un intervalo de tiempo cuando el promedio de ocurrencias es $\lambda$.

Su función generatriz está dada por,

$G_x(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}s^k=e^{\lambda(s-1)}=E(s^k)$ con

$G(1)=e^{\lambda}e^{-\lambda}=1$; resultando

$G^{(1)}(1)=\lambda e^{\lambda}e^{-\lambda}=\lambda=E(X)$.

### 2.3. FGP y Leyes de Probabilidad

Vemos a continuación como la función generatriz de probabilidades puede ser utilizada para encontrar la ley de probabilidad que sigue una variable aleatoria discreta específica.

**La FGP determina la ley de probabilidad de una variable aleatoria.** El siguiente teorema muestra como es posible determinar la ley de probabilidad de una variable aleatoria discreta por medio de la función generatriz de probabilidades.

**Teorema 2.1.** *Dada una variable aleatoria discreta X. Su distribución de probabilidad está determinada por su función generatriz de probabilidades, donde la distribución de probabilidad viene dada por,*

$$P(X=k)=\frac{G_x^{(k)}(0)}{k!}\;\forall k\geq 0 \tag{3}$$

*Donde* $G_x(s)$ *es la función generatriz de probabilidades de X;* $G_x^k(0)$ *es la k−ésima derivada de la FGP evaluada en el punto* $s=0$.

**Teorema de Unicidad**

Este teorema expresa que dos variables aleatorias diferentes que tienen la misma función generatriz de probabilidades, tienen necesariamente la misma ley de probabilidad.

**Teorema 2.2.** *Teorema de Unicidad*

*Sean X e Y variables aleatorias discretas con Función Generatriz de Probabilidad* $G_x(s)$ *y* $G_y(s)$ *respectivamente. Entonces,* $G_x(s)=G_y(s)$ *si y solo si* $P(X=k)=P(Y=k)$ *con k* = 0, 1, 2, ...
*en otras palabras, dos funciones generatrices de probabilidades coinciden si y solo si tienen la misma distribución de probabilidad.*

Los teoremas previos pueden extenderse con facilidad a funciones de variables aleatorias; en general para $Y=f(X)$, la función generatriz de probabilidades toma la siguiente forma,

$G_Y(s) = G_{f(X)}(s) = E(s^{f(x)}) = \sum_{k=0}^{\infty} s^{f(k)} P(X = k).$
En particular, para $Y = a + bX$, resulta:
$G_Y(s) = G_{a+bX}(s) = E(s^{a+bX}) = E(s^a s^{bX}) = s^a E\left[\left(s^b\right)^X\right].$
En consecuencia,

$$G_Y(s) = s^a G_X(s^b) \tag{4}$$

**2.4. Momentos**

Una forma elegante de calcular el valor esperado utilizando las derivadas de la función generatriz de probabilidades esta dada por el siguiente teorema. En los cursos introductorios es costumbre utilizar un tedioso procedimiento para encontrar la varianza de la distribución binomial que justamente utiliza $E\left[X\left(X-1\right)\right]$ como punto de partida.

**Teorema 2.3.** *Dada una variable aleatoria discreta X.*
*Sea* $G_X^{(r)}(1)$ *la r−ésima derivada de la FGP evaluada en el punto s* = 1. *Entonces,*

$$G_X^{(r)}(1) = E\left[X\left(X-1\right)...\left(X-r+1\right)\right] \tag{5}$$

A continuación se deducen expresiones para la media y la varianza de una variable aleatoria discreta *X* utilizando el teorema anterior.

- Caso: $r = 1$
  $G_X^{(r)}(s) = \frac{d}{ds}\left[\sum_{k=0}^{\infty} s^k P\left(X = k\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k s^{k-1} P\left(X = k\right)$
  que evaluado en $s = 1$ proporciona una expresión para el valor esperado de la variable aleatoria, $G_X^{(1)}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = E(X).$

- Caso: $r = 2$
  Al evaluar la segunda derivada en $s = 1$ se tiene,
  $G_X^{(2)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P(X = k) = E\left[X\left(X-1\right)\right] = E\left(X^2 - X\right)$
  pero es sabido que la varianza de una variable aleatoria está dada por $V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$;
  por lo que sumando y restando $\left[E(X)\right]^2$ resulta,
  $G_X^{(2)}(1) = E(X^2) - E(X) + \left[E\left(X\right)\right]^2 - \left[E\left(X\right)\right]^2$
  agrupando términos convenientemente,
  $G_X^{(2)}(1) = E(X^2) - \left[E\left(X\right)\right]^2 - E(X) + \left[E\left(X\right)\right]^2$
  donde los dos primeros términos del segundo miembro corresponden a la varianza de *X*, por lo que despejando se obtiene,
  $V(X) = E(X^2) - \left[E\left(X\right)\right]^2 = G_X^{(2)}(1) - \left[E\left(X\right)\right]^2 + E(X)$
  y poniendo en términos de las derivadas de las funciones generatriz de probabilidades produce la expresión buscada para la varianza,

$$V(X) = G_X^{(2)}(1) - \left[G_X^{(1)}(1)\right]^2 + G_X^{(1)}(1).$$

**2.5. Suma de dos variables aleatorias independientes**

Los siguientes resultados serán necesarios para desarrollar las ideas básicas de los procesos de ramificación; los mismos conciernen a la función generatriz de probabilidades de sumas de variables aleatorias independientes.

**Teorema 2.4.** *Sean X e Y variables aleatorias independientes; ambas variables representan conteos independientes.* $G_x(s)$ *y* $G_y(s)$ *son sus respectivas funciones generatrices de probabilidades.*
*Entonces,*

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s) \tag{6}$$

El teorema previo es fácilmente generalizado para *n* variables aleatorias independientes $X_1, X_2, ..., X_n$, siendo $G_{X_1}(s), G_{X_2}(s), ..., G_{X_n}(s)$ las respectivas funciones generatrices de probabilidades. Esto es, para, su función generatriz de probabilidades esta dada por,

$$G_Z(s) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(s) \tag{7}$$

**2.6. Suma de un número aleatorio de variables aleatorias independientes**

Cuando el número de variables aleatorias es también aleatoria, a diferencia del teorema anterior en el que este nùmero es fijo, el Teorema de Composición con respecto a los parámetros indica un procedimiento para determinar la correspondiente función generatriz de probabilidades.

**Teorema 2.5.** *Composición con respecto a los parámetros*
*Sean N,* $X_1, X_2, ...$ *variables aleatorias que representan conteos independientes tales que las* $X_i$

*están idénticamente distribuidas, y tienen igual función generatriz de probabilidades* $G_X(s)$

*Si* $S_N=X_1+X_2+\ldots+X_N$ *representa la suma de un número aleatorio N de variables aleatorias, entonces su función generatriz de probabilidades está dada por,*

$$G_{S_N}(s)=G_N\left[G_X(s)\right] \tag{8}$$

*Si N=0, por convención se define* $S_N=X_1+X_2+\ldots+X_N=0$.

Para finalizar esta sección obtenemos expresiones para la esperanza y varianza de sumas de un número aleatorio de variables aleatorias independientes.

**1. Esperanza de $S_N$**

Sea $G_{S_N}(s)$ la función generatriz de probabilidades de $S_N$; derivando con respecto a su argumento resulta, $\frac{d}{ds}\left[G_{S_N}(s)\right]=\frac{d}{ds}\left[G_N(G_X(s))\right]$ haciendo $u(s)=G_X(s)$, resulta $\frac{d}{ds}\left[G_{S_N}(s)\right]=\frac{d}{du}\left[G_N(u)\right]\frac{du}{ds}$ haciendo $s=1$ se tiene el resultado conocido $u=G_X(1)=1$; en consecuencia la expresión anterior toma la forma, $E(S_N)=\left[G_N^{(1)}(1)\right]\left[G_X^{(1)}(1)\right]$ finalmente se obtiene,

$$E(S_N)=E(N)E(X) \tag{9}$$

**2. Varianza de $S_N$**

A continuación se comprueba que la varianza de una suma de un número aleatorio de variables aleatorias independientes está dada por,

$$V_{S_N}(s)=E(N)V(X)+V(N)(E(X))^2 \tag{10}$$

En efecto, como $G_{S_N}(s)=G_N\left[G_X(s)\right]$ con primera derivada $\frac{d}{ds}\left[G_{S_N}\right]=\frac{d}{du}\left[G_N(u)\right]\frac{du}{ds}$, y $u=G_X(s)$ la segunda derivada resulta, $\frac{d^2}{ds^2}\left[G_{S_N}\right]=\frac{d^2}{du^2}\left[G_N(u)\right]\frac{du}{ds}\frac{du}{ds}+\frac{d}{du}\left[G_N(u)\right]\frac{d^2u}{ds^2}$ evaluando en $s=1$ y recordando que $\frac{d^2}{ds^2}\left[G_X(s)\right]=E\left[X(X-1)\right]$ se tiene,

$E\left[S_N(S_N-1)\right]=E\left[N(N-1)\right]E(X)E(X)+$
$E(N)E\left[X(X-1)\right]E\left(S_N^2\right)-E(S_N)=$
$\left[E(N^2)-E(N)\right](E(X))^2+E(N)\left[E(X^2)-E(X)\right]$

sumando y restando al primer miembro la expresión $\left(E(S_N)\right)^2$

luego, al primer término del segundo miembro se suma y resta $\left(E(N)\right)^2$

a continuación, al segundo término del segundo miembro se suma y resta $\left(E(X)\right)^2$

finalmente, luego de ordenar convenientemente, cancelar términos, utilizar el hecho que $E(S_N)=E(N)E(X)$ y la definición de varianza $V(S_N)=\left(E(S_N)^2\right)-\left(E(S_N)\right)^2$ se llega a la expresión buscada.

## PROCESOS DE RAMIFICACIÓN

El término "procesos de ramificación" es acuñado por Kolmogorov en Rusia. Según Jagers (2009), estos procesos se remontan al estudio de la evolución de los nobles y la extinción de familias realizado por De Candolle y Bienaymé; sin embargo, inicialmente se atribuyó el origen en un problema propuesto, 28 años más tarde, por Francis Galton, notablemente un biólogo, quien en al año 1873 publica en el Educational Times el Problema 4001, con el cual se da inicio a la teoría moderna. El problema plantea encontrar en una población, la proporción de apellidos extinguidos luego de transcurrir una cantidad de generaciones. Citado por Kendall (1966).

El primer intento de solución fue dado por el reverendo H.W. Watson, quien debido a un error algebraico concluyó equivocadamente que un apellido se extinguirá con probabilidad 1. Sin embargo sus métodos fueron correctos y constituyen las bases para llegar a la solución correcta. Watson determinó que la probabilidad de extinción es un punto fijo de la función reproductiva. Afirmó que 1 es siempre tal punto fijo, y a partir de esto concluye con Galton que "todos los apellidos tienden a desaparecer en un tiempo indefinido". Si bien Bienaymé dio la respuesta correcta antes que Galton, Heyde C. C. y Seneta E. (1977), la corrección se realiza 50 años mas tarde.

El planteamiento es conocido como el problema de Galton-Watson; y la solución plantea el conteo de generaciones que no se superponen en el transcurrir del tiempo.

El británico J. Haldane, químico, fisiólogo, estadístico genetista, y escritor político obtiene resultados correctos que son formulados por Steffensen 1930 en la siguiente forma "Si el número medio de criaturas es menor o igual que uno, entonces Galton y Watson estaban en lo cierto; pero si excede uno, entonces existe otro punto fijo menor, que proporciona la correcta probabilidad de extinción";

Más adelante, en torno a 1968, el desarrollo de la teoría de procesos puntuales permite la formulación del proceso de ramificación general en el cual los individuos dentro de la población pueden procrear en forma repetida, en una cadena de eventos que forman un proceso puntual posiblemente de varios tipos.

Durante todo este tiempo el marco conceptual lo constituía la teoría de poblaciones estables, la cual es una teoría determinística, aunque a partir de los modelos de ramificación general son posibles enfoques de tipo aleatorio que proporcionan interpretaciones ampliadas de los conceptos clásicos.

En la actualidad los desafíos de los procesos de ramificación en el campo de la evolución se relacionan con la teoría de la dinámica de poblaciones estructuradas y la dinámica adaptativa, en particular estudiando como pequeñas mutaciones sucesivas pueden conducir a nuevas especies y a su coexistencia.

### 3.1. Conceptualización

Se denomina Proceso de Ramificación en tiempo discreto a un tipo de Cadena de Markov en tiempo discreto con espacio de estados finitos. A este tipo de modelos cada miembro o individuo de la población desaparece en el momento de producir la siguiente generación. Siguiendo los delineamientos de Bardina (2008), se especifica a continuación el modelo a considerar.

$X_n$ es el número de individuos que una cierta población tiene en la $n-$ésima generación. Cada individuo, por ejemplo el $k-$ésimo de los $X_n$ existentes aporta $Z_{n+1}^{(k)}$ descendientes a la generación siguiente.

Las condiciones supuestas son,

1. El número de descendientes que cada individuo de la generación actual aporta a la siguiente generación es independiente del número de individuos que existen en la presente generación. Esto es, cada $Z_{n+1}^{(k)}$ es independiente de $X_n$.
2. El número de descendientes aportado por cada individuo de la generación actual son independientes entre si. Es decir, las $Z_{n+1}^{(k)}$ son mutuamente independientes.
3. La distribución de probabilidad del número de descendientes aportado por cada individuo de la generación actual a la siguiente es la misma para todos los individuos. En otras palabras, $Z_{n+1}^{(k)}$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas.
4. El número de descendientes de un individuo es una variable aleatoria discreta con valores enteros no negativos.

   $Z_{n+1}^{(k)} = 0, 1, 2, ...$
5. En la primera generación, o generación 0, solo existe un individuo. $X_0=1$

Dada la $n-$ésima generación, $X_{n+1}$ describe el número de individuos que existen en la generación $n+1$. Esto es,

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Z_{n+1}^{(k)} \tag{11}$$

Si la generación previa no produjo descendientes, consecuentemente la suma resulta cero.

A continuación, primero se presenta como evoluciona la población a lo largo del tiempo, y luego la probabilidad de que una población dada se extinga en un momento dado.

### 3.2. Evolución de la población

Sea $Z_{n+1}^{(k)}$ una variable aleatoria que representa el número de individuos que el miembro $k$ de la generación actual aporta a la siguiente generación. Su función de probabilidad se denota por $P\left(Z_{n+1}^{(k)} = z\right)$ con $z = 0, 1, 2, ...$; y función generatriz de probabilidades dada por, $G_{Z_{n+1}^{(k)}}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}s^kP\left(Z_{n+1}^{(k)}=k\right)$.

Se puede decir que $Z_{n+1}^{(k)}$ es el tamaño de la $k$–ésima familia.

La sucesión $X_0, X_1, X_2, \ldots$ representa entonces la evolución de la población a medida que van sucediéndose las generaciones. Este proceso puede ser estudiado utilizando las funciones generatrices de probabilidades. Como las $Z_{n+1}^{(k)}$ son supuestas independientes e idénticamente distribuidas, las respectivas funciones generatrices serán las mismas y se representarán por $G_Z(s)$.

Y como $X_{n+1}=\sum_{k=1}^{Xn}Z_{n+1}^{(k)}$ su FGP está dada por:

$$G_{X_{n+1}}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}s^kP(X_{n+1}=k) \qquad (12)$$

En la generación de partida, esto es $n=0$, y como, $P(X_0=1)=1$ y $P(X_0=k)=0$ para $k\neq 1$ se obtiene, $G_{X_0}(s)=s^0P(X_0=0)+s^1P(X_0=1)+\sum_{k=2}^{\infty}s^kP(X_0=k)=s$

Además, $G_{X_1}(s)=G_Z(s)$.

En lo que sigue la notación será, $X_n=Z_1+Z_2+\ldots+Z_{X_{n-1}}$ donde $Z_k$ representa la cantidad de descendientes que tiene $k$–ésimo individuo de la generación ($n$-1).

$X_n$ es suma de un número aleatorio de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas.

En los cálculos a realizar se utilizará el hecho que:

$G_n(s)=G_{n-1}\left[G(s)\right]$, $n$ = 2, 3, ...

De la relación se deduce que,

$$G_n(s)=G_{n-2}\left[G(G(s))\right]=\ldots=\underbrace{G_1\left[G(G(\ldots(s)))\right]}_{n-1}=\underbrace{G\left[G(G(\ldots(s)))\right]}_{n}.$$

Esta expresión indica que la función generatriz de probabilidades es la composición con la función generatriz de la generación anterior, y así sucesivamente hasta la generación inicial.

1. Valor esperado de $Xn$

$$E(X_n)=\mu^n \qquad (13)$$

Cuando $n$ tiende a infinito, el valor esperado tiende a 0 cuando $\mu$<1; por otro lado, si $\mu$>1 el valor esperado crece hacia infinito; y finalmente si $\mu$=1, el valor esperado se mantiene constante igual a 1. A este último valor se denomina valor crítico.

2. Varianza de $X_n$

La varianza del tamaño de una generación dada, por ejemplo $n$.

Cuando $\mu$=1, designando $\sigma^2=V(Z)$

$$V(X_n)=n\sigma^2 \qquad (14)$$

Cuando $\mu\neq 1$

$$V(X_n)=\sigma^2\mu^{n-1}\frac{\mu^n-1}{\mu-1} \qquad (15)$$

### 3.3. Probabilidad de extinción

La determinación utiliza procedimientos de condicionamiento, además de los conceptos y propiedades de la función generatriz de probabilidades. La solución depende del conocimiento de la distribución común de las $Z_n^{(k)}$.

Formalmente se busca encontrar, para algún $n\in\mathrm{N}$, $\rho=P\{\exists n:X_n=0\}=P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n=0\}\right]$.

**Teorema 3.1.** *Sea $G_Z$ la común función generatriz de probabilidades de las $Z_n^{(k)}$.*

*Entonces, $\rho$ satisface la ecuación, $\rho=G_Z(\rho)$ Es decir, $\rho$ es un punto fijo de la función generatriz de probabilidades G.*

Como para cualquier variable aleatoria $X$, $G_X(1)=\sum_{k=0}^{\infty}1^kP(X=k)=1$, entonces el valor 1 siempre es un punto fijo.

El problema consiste en determinar si 1 es o no la solución que interesa. La respuesta a esta cuestión la proporciona el teorema siguiente, que brinda las condiciones para determinar si $\rho=1$ es la solución buscada o no.

**Teorema 3.2.** *Dado $P\left(Z_n^{(k)}=0\right)$>0 Se tienen las siguientes posibilidades,*

1. *Si* $E\left[Z_n^{(k)}\right] \leq 1$ *entonces,* $\rho=1$.
2. *Si* $E\left[Z_n^{(k)}\right] > 1$ *entonces,* $\rho \in (0,1)$*; además* $\rho > 0$.

## UN EJEMPLO EN LA POBLACIÓN AMERICANA

Estudios realizados sobre la población americana han demostrado que es posible suponer que la probabilidad $P(n)$ de que una familia tenga exactamente $n$ hijos está dada por,

$$P(n) = \alpha p^n \quad P(0) = 1 - \alpha\left(p + p^2 + p^3 + ...\right) \tag{16}$$

donde $\alpha$ y $p$ son reales positivos, $n = 0,1,2,\ldots$ y además $p<1$, $1+\alpha \leq 1/p$.
Notar que la condición $1+\alpha \leq 1/p$ se cumple pues,

$$P(0) = 1 - \alpha\left(p + p2 + p3 + ...\right) \geq 0$$

por la definición de probabilidad, y porque $\alpha>0$ y $p>0$, y que también implican $P(n)>0$.
Además la serie debe ser convergente, caso contrario $P(0)<0$ a partir de algún valor $n_0$, para lo cual es necesario que se cumpla $|p| \leq 1$; pero como $p>0$, resulta $0<p<1$ y la suma de la serie está dada por $1/(1-p)$
Se tiene entonces,

$$P(0) = 1 - \alpha p\left(1 + p + p^2 + p^3 + ...\right) = 1 - \alpha p\left(\frac{1}{1-p}\right) \geq 0$$

de la desigualdad derecha se obtiene,

$$1 - \alpha p\left(\frac{1}{1-p}\right) \geq 0$$

$$1 - p \geq \alpha p$$

$$\frac{1-p}{p} \geq \alpha$$

por tanto queda establecida la desigualdad buscada,

$$1 + \alpha \leq \frac{1}{p}$$

Ahora bien, para $k \geq 1$, siendo iguales las probabilidades de tener varones y nenas, ¿cuál es la probabilidad de que una familia dada tenga exactamente $k$ hijos de sexo masculino?

Sea $Y$ el número total de hijos que tiene una familia cualquiera, y sea $X$ el número total de hijos varones.

La probabilidad de que una familia tenga exactamente $k$ hijos varones se expresa,

$$P(X=k) = P\left[\bigcup_{n=k}^{\infty}\{X=k\}\bigcap\{Y=n\}\right]$$

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X=k, Y=n)$$

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{\infty} P\left(X=k|_{Y=n}\right)P(Y=n)$$

como la distribución de $X$ condicional a $Y=n$ es una distribución binomial con parámetros (1/2; $n$), y se tiene que:

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{\infty} C(n,k)\left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha p^n$$

donde $C(n,k) = \binom{n}{k}$ es el número de formas que pueden resultar $k$ varones en una familia con $n$ hijos.

Se tienen entonces que,

$$P(X=k) = \alpha\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{p}{2}\right)^n$$

Notar que para $0 < x < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}.$$

Derivando sucesivamente hasta el $k$−ésimo orden se tiene,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = (1-x)^{-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = 2(1-x)^{-3}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3} = 2\cdot 3(1-x)^{-4}$$

y así sucesivamente hasta la $k$−ésima derivada,

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+n)x^{n-k} = k!(1-x)^{-(k+1)}$$

equivalentemente

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{(k+1)}}$$

haciendo $x=p/2$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{p}{2}\right)^{n-k}=\frac{k!}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^{(k+1)}}$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^{-k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{p}{2}\right)^{n}=\frac{k!}{\left(\frac{2-p}{2}\right)^{(k+1)}}$$

$$\frac{2^k}{p^k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{p}{2}\right)^{n}=\frac{2\cdot 2^k k!}{(2-p)^{(k+1)}}$$

dividiendo por $2^k k!$ y multiplicando por $\alpha p^k$

$$\alpha\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{p}{2}\right)^{n}=\frac{2\alpha p^k}{(2-p)^{(k+1)}}$$

se obtiene entonces la expresión buscada para la probabilidad, esto es,

$$p(X=k)=\frac{2\alpha p^k}{(2-p)^{(k+1)}} \tag{17}$$

A continuación interesa saber cual es el número esperado de hijos del sexo masculino que tendría una familia; suponiendo que los hijos llevan el apellido del padre.

Se define $X$ como el número de hijos varones. Se busca $E(X)$.

Por definición de valor esperado se tiene que $E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)$.

Ya se ha encontrado la expresión para la probabilidad de tener exactamente $k\geq 1$ hijos varones, es necesario determinar $P(X=0)$.

$$p(X=0)=1-\sum_{k-1}^{\infty}\frac{2\alpha p^k}{(2-p)^{(k+1)}}$$

$$P(X=0)=1-\frac{2\alpha}{2-p}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{p}{2-p}\right)^{k}$$

como $p/(2-p)<1\Rightarrow p<1$ resulta,

$$P(X=0)=1-\left(\frac{2\alpha}{2-p}\right)\frac{\frac{p}{2-p}}{1-\frac{p}{2-p}}$$

entonces,

$$P(X=0)=1-\left(\frac{2\alpha}{2-p}\right)\frac{\frac{p}{2-p}}{\frac{2-p-p}{2-p}}$$

$$P(X=0)=1-\left(\frac{2\alpha}{2-p}\right)\frac{p}{2(1-p)}$$

$$P(X=0)=1-\left(\frac{\alpha p}{(2-p)(1-p)}\right)$$

a continuación es posible determinar el valor esperado buscado,

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{2\alpha p^k}{(2-p)^{k+1}}$$

$$E(X)=\frac{2\alpha p}{(2-p)^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{p}{2-p}\right)^{k-1}$$

usando el hecho que

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

se obtiene,

$$E(X)=\frac{2\alpha p}{(2-p)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{p}{2-p}\right)^2}$$

luego de simplificar términos queda,

$$E(X)=\frac{\alpha p}{2(1-p)^2}.$$

Se estudia a continuación las probabilidades de extinción de la población cuya evolución es descrita por la condiciones probabilísticas enunciadas al inicio de esta sección.

1. Caso $p<1/2$

Como se ha visto previamente, si $E(X)\leq 1$ entonces la probabilidad de extinción es segura. Esto es, $\rho=1$; por otra parte, si $E(X)>1$ entonces la probabibilidad de extinción $\rho\in(0,1)$.

En efecto,

$$1+\alpha\leq 1/p\Rightarrow\alpha\leq 1/p-1=\frac{1-p}{p}$$

entonces,

$$\frac{\alpha p}{2(1-p)^2}\leq\left(\frac{1-p}{p}\right)\frac{p}{2(1-p)^2}$$

$$\frac{\alpha p}{2(1-p)^2}\leq\frac{1}{2(1-p)}<\frac{1}{2}2=1$$

pues $p<1/2\Rightarrow -p>-1/2\Rightarrow 1-p>1/2\Rightarrow 2>1/(1-p)$.

En consecuencia, bajo estas condiciones, como la probabilidad de extinción es 1, el apellido es seguro que se extinguirá.

2. Caso $p>1/2$

Se sabe que si $E(X)>1$ entonces $\rho\in(0,1)$, donde $\rho$ es la probabilidad de extinción; es al mismo tiempo, un punto fijo de la función generatriz.

La función generatriz de probabilidades se denota por $G$, esto es

$$G(s)=E\left(s^X\right)$$

$$P(X=0)+\sum_{k=1}^{\infty}s^kP(X=k)$$

$$=1-\frac{\alpha p}{(2-p)(1-p)}+\sum_{k=1}^{\infty}s^k\frac{2\alpha p^k}{(2-p)^{(k+1)}}$$

$$=1-\frac{\alpha p}{(2-p)(1-p)}+\frac{\alpha p}{(2-p)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{sp}{2-p}\right)^k$$

donde la serie geométrica es convergente para $\frac{sp}{2-p}<1$, por lo que se escribe,

$$G(s)=1-\frac{\alpha p}{(2-p)(1-p)}+\left(\frac{2\alpha}{2-p}\right)\frac{\frac{sp}{2-p}}{1-\frac{sp}{2-p}}$$

$$=1-\frac{\alpha p}{(2-p)(1-p)}+\frac{2\alpha sp}{(2-p)(2-p-sp)}$$

Recordar que se debe encontrar $s$ tal que $s = G(s)$, se tiene que,

$$G(s)=1-\frac{\alpha p}{(2-p)(1-p)}+\frac{2\alpha sp}{(2-p)(2-p-sp)} \tag{18}$$

pero

$$c=1-\frac{\alpha p}{(2-p)(1-p)} \tag{19}$$

no depende de $s$, por lo que es considerado como una constante.

Por lo visto previamente, 1 es un punto fijo de la FGP; y además, $\rho$ es el otro punto fijo de interés. En tal caso, se verifica que debe satisfacer, $(s-1)(s-\rho)=0$, esto es una ecuación de segundo grado en $s$.

$$s^2-(1+\rho)s+\rho=0 \tag{20}$$

De la ecuación (18) se obtiene,

$$s-c=\frac{2\alpha sp}{(2-p)(2-p-sp)}$$

$$(s-c)(2-p)(2-p-sp)=2\alpha sp$$

A continuación, es necesario dividir la expresión obtenida por ($-p$) de manera a conseguir una ecuación conveniente.

La ecuación resultantes es,

$$(s-c)(2-p)\left[s-\frac{2}{p}+1\right]=-2\alpha s \tag{21}$$

$$(s-c)(2-p)\left[\left(1-\frac{2}{p}\right)+s\right]=-2\alpha s$$

$$(s-c)\left[(2-p)\left(1-\frac{2}{p}\right)+(2-p)s\right]=-2\alpha s$$

$$\left[(2-p)\left(1-\frac{2}{p}\right)s+(2-p)s^2\right]-$$

$$\left[c(2-p)\left(1-\frac{2}{p}\right)+c(2-p)s\right]=-2\alpha s.$$

Reordenando convenientemente,

$$(2-p)s^2+\left[(2-p)\left(1-\frac{2}{p}\right)-c(2-p)\right]s-c(2-p)\left(1-\frac{2}{p}\right)=-2\alpha s.$$

Para comparar ésta ecuación con la ecuación (20) es necesario dividirla por ($2-p$) obteniéndose,

$$s^2+\left[\left(1-\frac{2}{p}\right)-c\right]s-c\left(1-\frac{2}{p}\right)=-\frac{2\alpha s}{2-p} \tag{22}$$

Usando la ecuación 22 y la expresión para $c$ de la expresión 20 se obtiene,

$$\rho=\left[\frac{\alpha p}{(2-p)(1-p)}-1\right]\left(1-\frac{2}{p}\right)=\frac{\left[\alpha p-(2-p)(1-p)\right]}{(2-p)(1-p)}\left(1-\frac{2}{p}\right).$$

Luego de simplificar ($2-p$), finalmente se obtiene la expresión para el otro punto fijo de la función generatriz de probabilidades, esto es,

$$\rho=\frac{\left[(2-p)(1-p)-\alpha p\right]}{p(1-p)} \tag{23}$$

Este resultado y tomando en consideración las consecuencias del teorema (3.2) proporciona la probabilidad de que un apellido se extinga en ésta población.

## CONCLUSIÓN

La teoría de los procesos de ramificación se apoya firmemente en el concepto de función generatriz de probabilidades. Estas funciones tienen la ventaja de facilitar el cálculo de los valores esperados, así como la determinación de las probabilidades de que la variable aleatoria asociada tome un valor específico. Otra cualidad de estas funciones es que permiten mayor facilidad en la determinación de las correspondientes funciones de probabilidad; además de proporcionar herramientas que reducen el esfuerzo de operar con sumas de variables aleatorias y permiten el cálculo de cualquiera de las probabilidades a partir de la función generatriz.

Los cálculos recurren en general a tres procedimientos estándar; (1) Hacer uso del hecho que la función de probabilidad suma 1 para buscar una expresión adecuada. (2) Utilizar el teorema de partición para hallar el valor esperado. (3) Usar la suma de una sucesión de variables aleatorias independientes más simples.

El proceso básico de ramificación, considerado en este trabajo, es un ejemplo de procesos en espacio y tiempo discreto. La discretización del tiempo es justificada al unir el paso del tiempo con la aparición de sucesivas generaciones de la población. Notar que muchas especies tienen tiempos de apareamiento regulares y en consecuencia se produce una nueva generación en momentos regulares aproximadamente discretos en el tiempo. En cada etapa, cada individuo tiene cierta probabilidad de contribuir con un número de descendientes, $k$, a la siguiente generación. Por tanto, la no existencia de descendientes puede interpretarse como que el individuo fallece antes del inicio de la nueva generación; $k = 1$ indica que el individuo sobrevive a la aparición de la nueva generación pero no tuvo descendientes; en general $k > 1$ implica que el individuo sobrevive y tiene varios descendientes que viven en la siguiente generación. Un individuo que sobrevive a la siguiente generación aún puede tener descendencia en la generación que vive.

En los procesos de ramificación es crucial determinar la distribución del tamaño total de la población luego de transcurrir un número fijo de generaciones; aunque es posible determinar la evolución y la probabilidad de extinción de la población sin tener conocimiento explícito de tal distribución, bastando solo el conocimiento de los valores medios y la varianza del número total de individuos en una generación dada y determinando el valor del punto fijo de la función generatriz de probabilidades que corresponde a la variable aleatoria estudiada.

El proceso de ramificación es un caso especial de las cadenas de Markov pues el modelo supone que los individuos en cualquier generación tiene descendientes independientemente de lo que ocurrió en la pasada generación.

El problema de la población americana es ciertamente un modelo sencillo en el que las probabilidades de descendencia son iguales para cada individuo en cada generación. Una suposición adicional es que los tiempos entre generaciones es fijo y que todos los individuos de una generación dada se reproduce de manera independiente. Esto es, se está considerando una población homogénea, donde cada miembro tiene la misma probabilidad de fertilidad y sobrevivencia; ésta suposición es desde luego discutible en una población real pues es posible que existan numerosos factores que generen una población no homogénea.

Tal como se ha resuelto el ejemplo de la población americana, se evidencia que no ha sido necesario determinar cual es la forma específica de la distribución del tamaño de la población, simplemente ha bastado con encontrar los puntos fijos de la función generatriz de probabilidad para conocer la probabilidad de extinción de la misma.

Notar que una vez conocidos los valores numéricos de la media y la varianza del número de descendientes que cada individuo de la población en una generación dada, si la media es mayor que uno, tanto la media como la varianza del tamaño poblacional tienden al infinito cuando crece el número de generaciones; además la probabilidad de extinción está entre 0 y 1. Si por otra parte, el promedio de descendientes por individuo es menor que 1, la probabilidad de extinción es 1, esto es, la población ciertamente desaparecerá.

**REFERENCIAS**


BARDINA, X. (2008). Processos de ramificació (mimeo). Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

BENNEWITZ J., MEUWISSEN T. H. E. (2005). Estimation of Extinction Probabilities of Five German Cattle Breeds by Population Viability Analysis; J. Dairy Sci. 88, 2949 - 2961 American Dairy Science Association.

ESQUIVEL M. (2004). Probability Generating Functions for Discrete Real Valued Random Variables. Internet: http://ferrari.dmat.fct.unl.pt/personal/mle/PUBLrdf/GPGF-04VII19.pdf

FELLER W. (1968). An introduction to Probability theory and its Applications. 3rd ed. John Wiley and Sons.

HACCOU P., JAGERS J., VATUTIN V. (2005). Branching Processes:Variation, Growth and Evolution of Populations, Cambridge: Cambridge University Press.

HARRIS, T.E. (1963). The theory of branching processes. Berlin: Springer–Verlag.

HEYDE C. C., SENETA E. (1977). I.J. Bienayme: Statistical Theory Anticipated. New York: Springer Verlag . pp. 117.

HOFFMAN–JØRGENSEN J. (1994). Probability with a view towards statistics. Volume I, Chapman and Hall.

JAGERS P. (2009). Some Notes on the History of Branching Processes, from my Perspective. Oberwolfach. Internet:www.math.chalmers.se/jagers/Branching20History.pdf

KENDALL D. G. (1966). Branching Processes Since 1873, Journal of London Mathematics Society, vol. 41, p. 386.

LANDO S. K. (2003). Lectures on generating Functions, Student Math.Library American Mathematical Society.

NAKAMURA M., PEREZ-ABREU V. (1993a). Use of an empirical probability generating function for testing a Poisson model. Canadian. J. Stat. 21, No.22 149-156.

NAKAMURA M., PEREZ-ABREU V. (1993b). Empirical probability generating function. An overview. Insur. Math. Econ. 123 349-366.

RAUP, D. M. (1991). Extinction. New York: Norton.

ROYCHOUDHURY S., BHATTACHARJEE, M.C. (2006), A Family of Probability Generating Functions Induced by Shock Models. New Jersey Institute of Technology, CAMS Report 0506-40, Center for Applied Mathematics and Statistics.

RUEDA R., O'REILLY F. (1999). Tests of fit for discrete distributions based on the probability generating function. Commun. Stat., Simulation Comput. 28 1 (1999) 259-274.

THEODOROU K., COUVERT D. (2006). On the expected relationship between inbreeding, fitness and extinction. vol. 38. INRA, EDP sciences.

VILLA E. R., ESCOBAR L.A. (2006); Using Moment Generating Functions to Derive Mixture Distributions. The American Statistician, Vol. 60, No. 1.

Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Galton–Watson-process, Fecha acceso: Agosto, 2009.